

به نام خدا

تکلیف سری دوازدهم مکانیک تحلیلی 1

(1) (الف) میانگین آهنگ اتلاف انرژی توسط نیروی میرایی را در هر پریود محاسبه کنید.

(ب) آهنگ انجام کار توسط نیروی واداشته را روی نوسانگر هماهنگ محاسبه کرده و میانگین آن در هر پریود را به دست آورید. ارتباط بین این دو کمیت چیست؟ مفهوم فیزیکی نتیجه ی به دست آمده را توصیف کنید.

(2) بسط فوریه ی تابع زیر را در بازه ی $-\pi/\omega < t < \pi/\omega$ به دست آورید:

$$F(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ +1, & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

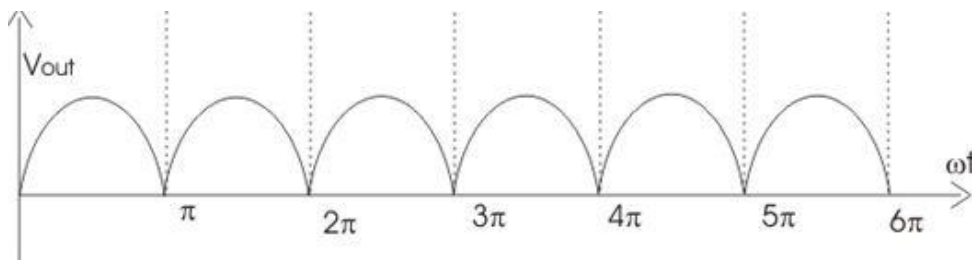
مجموع دو جمله ی اول، سه جمله ی اول و چهار جمله ی اول را محاسبه و ترسیم کنید، تا نشان دهید که این سری همگراست.

(3) سری فوریه ای را که نمایشگر تابع زیر باشد، به دست آورید:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{2\pi}{\omega} < t < 0 \\ \sin \omega t, & 0 < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

(4) سری فوریه ای را به دست آورید که خروجی یک یکسوساز تمام موج را نشان دهد. سه جمله ی بسط آن را ترسیم و با تابع کامل مقایسه کنید.

(راهنمایی: ضابطه ی یک تابع یکسوساز تمام موج به صورت $F(t) = |\sin \omega t|$ است که در شکل زیر نشان داده شده است.)



5) پاسخ نوسانگر هماهنگ میرای واداشته به نیروی ضربه ای را، به صورت برهم نهی پاسخ دستگاه به دو نیروی پله ای، به صورت زیر به دست آورید.

$$F(t) = F_0[\theta(t - t_0) - \theta(t - t_1)]$$

که در آن $\theta(t)$ تابع پله ای واحد است.

6) بر یک نوسانگر خطی میرا که در وضعیت تعادل در حال سکون است، تابع وادارنده ای وارد می آید که رابطه ای زیر بیانگر آن است:

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \times \left(\frac{t}{\tau}\right), & 0 < t < \tau \\ a, & t > \tau \end{cases}$$

تابع پاسخ را بیابید. حالت $\tau \rightarrow 0$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که جواب آن به جواب تابع پله ای تبدیل می شود.

7) پاسخ یک نوسانگر خطی را به تابع وادارنده زیر به دست آورید:

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a \sin \omega t, & 0 < t < \pi/\omega \\ 0, & t > \pi/\omega \end{cases}$$

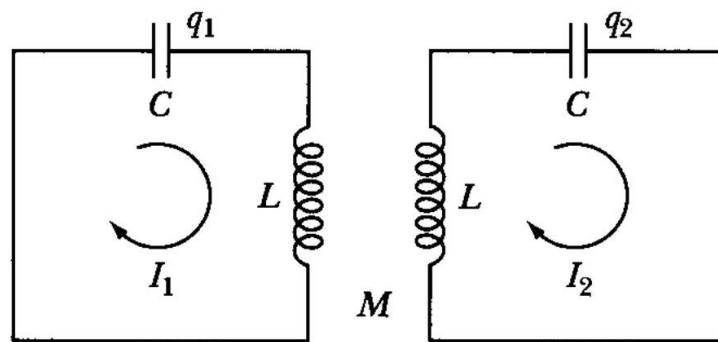
8) مدهای نوسانی دستگاه زیر را پیدا کنید. در سیستم زیر همه ی جرم ها دارای جرم یکسان m و ضریب کشسانی همه ی فنرها برابر k و میزی که دستگاه روی آن واقع است بدون اصطکاک فرض شده است.



9) مدار الکتریکی که در شکل زیر نشان داده شده است را در نظر بگیرید. با استفاده از مفاهیم مطرح شده در بحث نوسانات کوپل شده، فرکانس های مشخصه ی مدار زیر (معادل مدهای نوسانی) را بر حسب مقدار خازن C ، اندوکتانس L و اندوکتانس متقابل M به دست آورید. برای به دست آوردن معادله ی مشخصه ی سیستم از معادلات ولتاژ کیرشهوف که در زیر به دست آمده استفاده کنید.

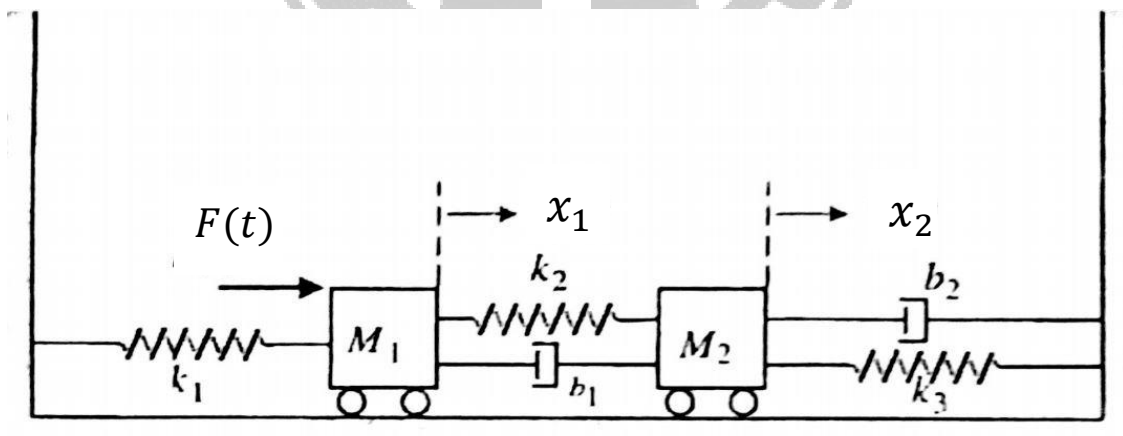
$$LI_1 + \frac{q_1}{C} + MI_2 = 0$$

$$LI_2 + \frac{q_2}{C} + MI_1 = 0$$



10) (اختیاری) در شکل زیر ثابت فنرها به ترتیب k_1 ، k_2 و k_3 و ثابت میراسازها (*Damper*) برابر b_1 و b_2 و اصطکاک صفحه ی افقی ناچیز است. مدل الکتریکی سیستم زیر را رسم نموده و $X_2(i\omega)/F(i\omega)$ را پیدا کنید.

توجه: $i = \sqrt{-1}$



(11) (اختیاری) در شکل زیر هدف آن است که پس از اعمال نیروی پله ای واحد به اندازه $1N$ در زمان $t = 0$ جرم m در فاصله 1 متری از نقطه ای اولیه متوقف شود. به ازای $m = 1kg$ و $k = 1 N/m$ محدوده ی ثابت میراساز B را به گونه ای تعیین کنید که مسافت طی شده توسط جسم برای رسیدن به نقطه ی هدف مینیمم باشد.

