

به نام خدا

تکلیف سری سیزدهم مکانیک تحلیلی 1

1) ثابت کردیم برای نیروی مرکزی رابطه ی  $x^2 + y^2 = r_0^2 + \varepsilon^2 x^2 + 2r_0 \varepsilon x$  برقرار است. این رابطه را به شکل رابطه ی کلی بیضی  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  بدست آورید و از روی آن نیم قطر کوچکتر و نیم قطر بزرگتر یعنی  $a, b$  را به دست آورید.

2) برای نیروی مرکزی با تقسیم رابطه ی  $\frac{dr}{dt}$  و  $\frac{d\theta}{dt}$  به رابطه ی  $\frac{1}{\mu r^2} dr$   $\int d\theta = \pm \int \frac{1}{\mu r^2} dr$  رسیدیم. این رابطه را حل کنید و  $r(\theta)$  را بدست آورید.

3) برای ذرات بدون برهم کنش در مختصات قطبی  $r(t)$  و  $\theta(t)$  را بدست آورید. (مساله را به عنوان یک مساله نیروی مرکزی در نظر بگیرید.)

4) قانون نیرویی به شکل زیر را در نظر بگیرید

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^4}$$

نشان دهید که اگر  $\rho^2 k > k'$  در این صورت یک ذره می تواند در یک مدار دایره ای پایدار در  $r = \rho$  حرکت کند.

5) دو ذره تحت تاثیر نیروی گرانشی متقابلشان حرکت و مسیرهای دایره ای را با دوره ی تناوب  $r$  به دور یک دیگر طی می کنند. اگر ناگهان در مدارهایشان متوقف شوند و امکان یابند که با جاذبه ی گرانشی به سوی یک دیگر کشیده شوند، نشان دهید که پس از مدت  $r/4\sqrt{2}$  به یک دیگر برخورد خواهند کرد.

6) دو جرم  $m_1$  و  $m_2$  که جاذبه ی گرانشی دارند ( $m_1 + m_2 = M$ ) به فاصله ی  $r_0$  از یک دیگر قرار گرفته اند و از حالت سکون رها می شوند. نشان دهید که در فاصله ی  $r (> r_0)$  سرعتشان عبارت است از

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}, \quad v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{M} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}$$

7) ذره ای در میدان نیروی مرکزی عکس مجذوری در یک مدار بیضوی حرکت می کند. اگر نسبت بیشینه سرعت زاویه ای به کمینه سرعت زاویه ای ذره در مدارش برابر  $n$  باشد، در این صورت نشان دهید که خروج از مرکز مدار عبارتست از

$$\epsilon = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$$

8) قانون نیرو را برای یک میدان نیروی مرکزی بیابید، که حرکت یک ذره را در مسیری مارپیچی به معادله ی  $r = k\theta^2$  مجاز می دارد. در این عبارت  $k$  ثابت است.