

به نام خدا

تکلیف سری هشتم مکانیک تحلیلی ۱

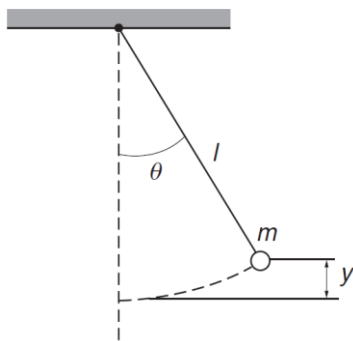
(۱) یک آونگ ساده به طول l و جرم m را در نظر بگیرید. فرض کنید آونگ در $t = 0$ در زاویه $\theta = \theta_0$ قرار گرفته باشد.

الف) با استفاده از قانون پایستگی انرژی معادله ی حرکت برای جرم m را برحسب زاویه θ بیابید.

ب) حال فرض می کنیم دامنه ی نواسانات به قدری کوچک است که تقریب $\sin(\theta) \approx \theta$ برقرار باشد. با استفاده از این فرض معادله ی حرکت به دست آمده را حل کنید.

ج) فرض کنید دامنه ی نواسانات به گونه ای باشد که بتوان از تقریب $\sin(\theta) \approx \theta - \frac{1}{6}\theta^3$ استفاده کرد. با این فرض معادله ی حرکت را با روش اختلال حل کنید.

(راهنمایی: حل مختل شده $\theta = \theta^{(0)} + \psi$ را در نظر گرفته و فقط تصحیحات مرتبه ی اول را نگاه دارید. $\theta^{(0)}$ حل به دست آمده برای θ در قسمت (ب) سوال است.)

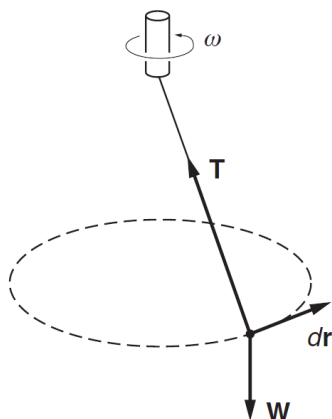


(۲) جرم m در انتهای نخ ی با طول ثابت l قرار دارد. که انتهای نخ در مبدا مختصات ثابت شده است. با استفاده از مولفه های شتاب در دستگاه مختصات کروی:

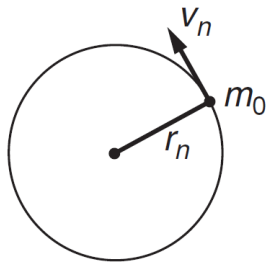
الف) معادلات حرکت نیوتون را بنویسید.

ب) نشان دهید به ازای شرایط مناسب، حلی به صورت $\theta = \theta_0$ و $\varphi = \omega_0 t$ وجود دارد. شرایط مناسب برای این حل را تعیین کنید.

ج) حال فرض کنید حل فوق به مقدار کوچکی مختل شود، یعنی $\theta = \theta_0 + \Theta$ و $\dot{\varphi} = \omega_0 + \eta$ را برای حل مختل شده در نظر بگیرید و تصحیحات را تا مرتبه ی اول انجام دهید. معادلات حرکت را برای η و Θ به دست آورید و حرکت مختل شده را توصیف کنید.



(راهنمایی: معادله ی حرکت $F_\varphi = 0$ به یک ثابت حرکت منجر می شود.)



۳) اتم بور ساده ای متشکل از یک پروتون و الکترون را در نظر بگیرید (مثل اتم هیدروژن).

فرض کنید الکترون در مدارهای ثابتی به دور پروتون می چرخد و بین آن ها پتانسیل جاذبه ی کولنی وجود دارد.

الف) با استفاده از معادلات حرکت نیوتون، رابطه ی سرعت مداری الکترون و شعاع چرخش آن را بیابید

ب) رابطه ی انرژی کل الکترون با شعاع چرخش r و سرعت مداری آن v را به دست آورید.

ج) حال فرض کنید اندازه حرکت زاویه ای الکترون مضرب درست n از $h/2\pi$ باشد. به عبارت دیگر $l = nh/2\pi$ که در آن n عددی

درست است (این حدسی بود که نیلزبور در سال ۱۹۱۶ برای مدل اتمی خود فرض کرد). با استفاده از این فرض انرژی کل، شعاع چرخش الکترون

و سرعت مداری آن را بر حسب n محاسبه کنید.

۴) سطح مقطع گیراندازی یک سیاره فرض کنید یک فضایما از بی نهایت دوردست به یک سیاره نزدیک می شود. در شکل زیر چند مسیر

ممکن فضا پیمایا رسم شده است. فرض شده که فاصله ی نقطه ی پرتاب و سیاره ی هدف نسبت به R خیلی زیاد است، به طوری که مسیرهای

مختلف قبل از آن که نیروی گرانشی سیاره عمل کند، عملاً با هم موازی هستند. خط aa موازی با مسیر اولیه است که از مرکز سیاره می گذرد.

فاصله ی b بین مسیر اولیه و خط aa پارامتر برخورد نامیده می شود. بزرگترین مقدار b که به ازای آن، مسیر فضایما با سیاره برخورد می کند،

در شکل با b' مشخص شده است. (اگر هیچ جاذبه ای نبود مسیرها خطوط راست بودند، در این حالت $b' = R$ می بود) حال با توجه به اطلاعات

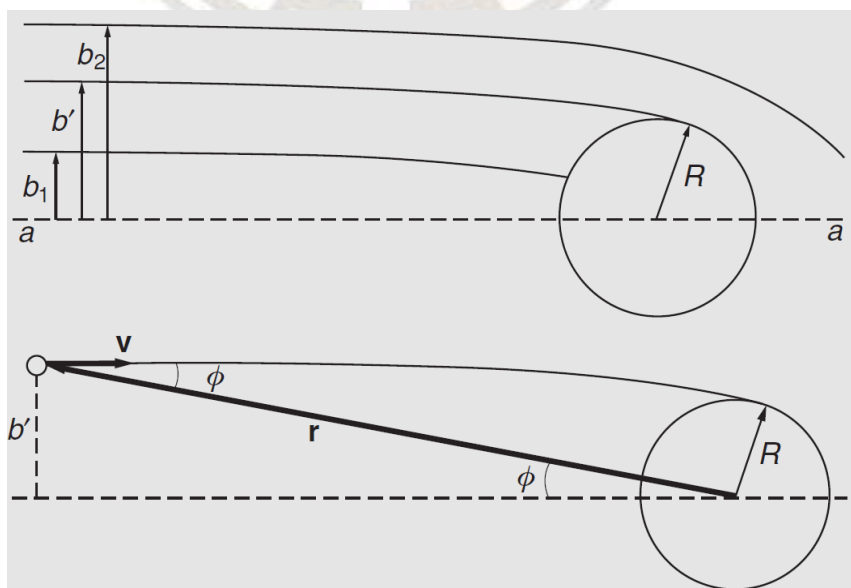
داده شده به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) در این مساله چه کمیت هایی پایسته هستند؟

ب) با استفاده از قوانین پایستگی برای کمیت هایی که در قسمت الف) مشخص نمودید، مقدار b' را محاسبه کنید.

ج) سطح مقطع گیراندازی سیاره به صورت $A_e = \pi b'^2$ تعریف می شود. اگر سطح مقطع برخورد هندسی را به صورت

$A_g = \pi R^2$ تعریف کنیم، A_e را بر حسب A_g یافته و جواب به دست آمده را تحلیل کنید.



۵) پرتابه ای به جرم m از سطح زمین با زاویه α از قائم مطابق شکل زیر پرتاب شده است. سرعت اولیه v_0 برابر $\sqrt{GM_e/R_e}$ است. پرتابه تا چه ارتفاعی بالا می رود؟ از مقاومت هوا و دوران زمین صرف نظر کنید. (راهنمایی: احتمالاً به کار گرفتن مستقیم قوانین پایستگی آسانتر است تا استفاده از معادلات دقیق مسیر حرکت پرتابه)

