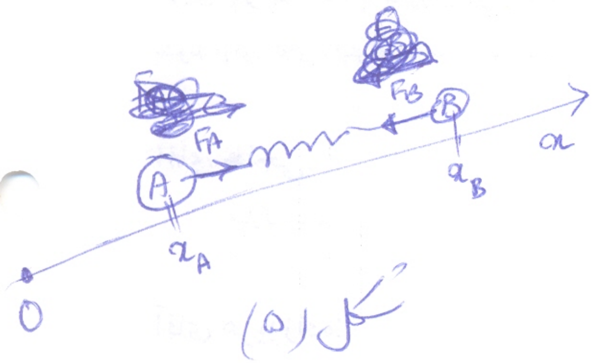
نسبت به هم در جایی از حرکت مستلزم داشتن اصطکاک ایستایی بزرگتر از $N\mu$ است، آنگاه دو جسم دیگر نمی‌توانند نسبت به هم ساکن باشند و آغاز به لغزیدن خواهند کرد. بدیهی است که اگر چنین اتفاقی رخ دهد، از آن بعد باید مجدداً مسئله را در شرایط جدیدی که با سر خوردن اجسام روی هم ملازمت دارد حل کرد.

۲-۶- نیروی فنر



شکل (۵)

یک فنر کشیده شده یا فشرده شده می‌تواند به اجسامی که در دو طرف آن قرار گرفته‌اند نیرو وارد کند.

در شکل (۵) فرض کرده‌ایم محور x امتداد اثر نیروی فنر را نشان می‌دهد که همان امتداد محور تقارن فنر است. اگر طول عادی فنر l_0 و طول تغییر یافته‌ی آن l باشد $\Delta l = l - l_0$ تغییر طول فنر است. برای فنر کشیده شده، $\Delta l > 0$، اجسام A و B به سمت هم کشیده می‌شوند و برای فنر فشرده شده، $\Delta l < 0$ دو جسم از هم دور می‌شوند. مقدار نیروی فنر بر هر یک از دو جسم با Δl متناسب است به طوری که می‌توان نوشت

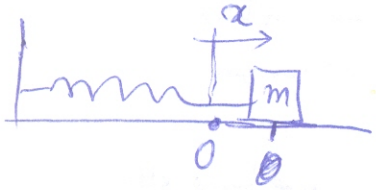
$$|F| = k|\Delta l| \qquad (8)$$

ضریب k ثابت فنر نام دارد که به خواص کشسانی ماده‌ی سازنده‌ی آن مربوط است.

در شکل (۵) حالتی را در نظر گرفته ایم که فنر کشیده شده است. در این حال با توجه به آنچه در مورد جهت نیروی فنر گفته شد داریم

$$F_B = -F_A = -k(x_B - x_A - l) \qquad (۹)$$

در این رابطه x_A و x_B مختصات نقاط A و B نسبت به مبدأ O هستند. رابطه (۹) یک رابطه جبری است که مقدار و جهت نیروهای F_A و F_B را به دقت می دهد. اگر یکی از دو جسم را دیوار متصل به جسم بسیار سنگینی مثل زمین بگیریم که عملاً بتوان آن را ساکن پنداشت مطابق شکل (۶) می توان نوشت



(شکل ۶)

$$F = -kx \qquad (۱۰)$$

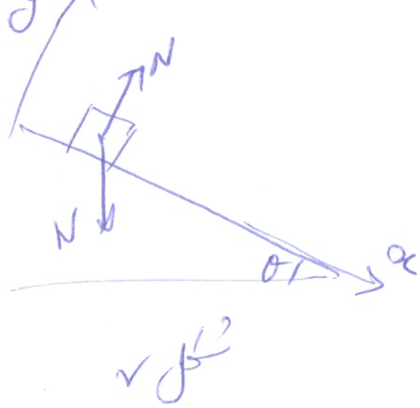
در اینجا مبدأ مختصات O را جایی گرفته ایم که فنر طول عادی خود را دارد.

همانطور که دیده می شود در هر مسئله ای که نیروی فنر در کار باشد و تغییر طول فنر در مقایسه با ابعاد مسئله قابل توجه باشد می توان قانون نیروی فنر (روابط ۹ یا ۱۰) را به کار برد. نیروی فنر علاوه بر جنبه کاربردی خاص آن به عنوان یک ابزار مکانیکی، در بسیاری از موارد می تواند به عنوان مدلی برای بررسی رفتار دستگاههای مکانیکی در نزدیکی نقطه تعادل پایدار آنها به کار رود. به طور کلی می توان گفت تمام دستگاههایی که نزدیک نقطه تعادل پایدار حول نوسان می کنند تحت

اثر نیروهایی قرار دارند که در نخستین تقریب می‌توان آنها را نسبت به نیروهای قوی‌تری به حساب آورد.

۳- قیود

قوانین حرکت و قوانین نیرو تمام آن چیزی نیست که برای حل یک مسئله مکانیک لازم است. معمولاً هر مسئله مکانیک با یک یا چند قید نیز همراه است. در بخش گذشته دیدیم که نیروهایی از قبیل نیروی عمودی سطح، نیروی کشش نخ و نیروی اصطکاک استاتیک از یک قانون نیروی کمّی تبعیت نمی‌کنند. اما در واقع می‌دانیم که آنها نشان دهندهٔ برهم‌کنش‌های واقعی یک جسم با اجسام پیرامون خود هستند. معمولاً هر یک از این نیروها با یک قید ملازم هستند و در ضمن نوشتن معادلات حرکت در ازای فقدان یک قانون نیروی کمّی برای هر یک از نیروهای فوق یک رابطه ریاضی بین مختصات توصیف‌کننده دستگاه و یا تغییرات آنها در مسئله اعمال می‌کنیم.



شکل ۷

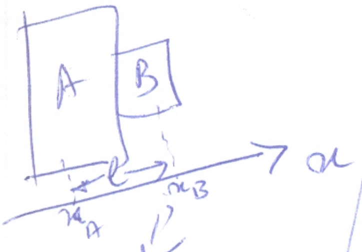
مثلاً در شکل ۷ برای جسمی که در امتداد یک سطح شیبدار بدون اصطکاک به پایین می‌لغزد به غیر از نیروی وزن که برای آن قانون نیروی $W=mg$ را به کار می‌بریم نیروی عمودی سطح N نیز باید در نظر گرفته شود. در اینجا در ازای فقدان یک رابطهٔ کمّی اولیه برای N، این شرط را اعمال می‌کنیم که جسم باید در امتداد سطح شیبدار مذکور به پایین بیاید. در دستگاه مختصات نشان داده در شکل ۷

این بدان معناست که حرکت در ~~صفحه~~ صفحه x-y به محور x محدود است. به بیان دیگر رابطه y=ثابت و یا $v_y=0$ و $a_y=0$ تلویحاً یا تصریحاً در نظر گرفته شده است. از تجزیه نیروها در امتداد محورها با اعمال قید $a_y=0$ داریم $N=mg\cos\theta$. چنانچه دیده می شود رابطه کمّی N از ابتدا به معادلات حرکت اعمال نمی شود، بلکه به جای آن قید $a_y=0$ اعمال می شود و مقدار نیروی N از حل معادلات حرکت به دست می آید.

علت اینکه پیش از این گفتیم نیروی عمودی سطح یک نیروی قیدی است نیز از همین مثال قابل درک است. در اینجا آنچه اصل گرفته می شود قید (y=ثابت) است که هر حل مسئله باید از آن تبعیت کند. نیروی قیدی N خود را چنان تنظیم می کند که این قید در طی مسئله برقرار بماند. به طور کلی دو جسم صلب که در تماس با هم هستند نمی توانند در یکدیگر فرو بروند. البته ممکن است در شرایطی از هم جدا شوند و تماس آنها قطع شود. شکل (۲) شمایی کلی از چنین وضعیتی را نشان دهد. اجسام A و B در ضمن حرکت خود باید شرط

$$x_B - x_A \geq a \qquad (11)$$

را رعایت کنند. مادامی که دو جسم در تماس با هم هستند رابطه (11) در حالت تساوی آن یعنی $x_B - x_A = a$ برقرار است. هر جسم ممکن است از دید ناظر وصل به دیگری در امتداد سطح تماس جابه جا شود اما در آن فرو نمی رود. در واقع نیروی قیدی N از این



شکل ۲

همان شکل قبلا کامل شده

کار مخالفت می کند. این نیرو هر اندازه لازم باشد مقدار خود را تنظیم می کند تا فاصله دو جسم از آنچه اقتضای ابعاد و اندازه های آنهاست کمتر نشود. در حالتی که دو جسم از هم جدا شوند دیگر نه قیدی در کار است و نه نیروی قیدی N. در چنین وضعیتی دو جسم مستقل از یکدیگر تحت تاثیر سایر برهم کنش ها حرکت خواهند کرد.

در مورد نیروی کشش نخ نیز شرایطی مشابه نیروی عمودی سطح، لکن در جهت مخالف برقرار است. مراجعه مجدد به شکل ۳ نشان می دهد که نقش نیروی کشش نخی که دو جسم A و B را به هم وصل می کند آن است که فاصله دو جسم از مقدار معینی فراتر نرود. با توجه به شکل مذکور داریم

$$x_B - x_A \le l \qquad (۱۲)$$

تا زمانی که نخ کشیده شده است رابطه (۱۲) را باید به شکل تساوی به کار برد. در این حال با مشتق گیری از رابطه (۱۲) خواهیم داشت

$$v_B = v_A \quad \text{و} \quad a_B = a_A \qquad (۱۳)$$

یک بار و دو بار

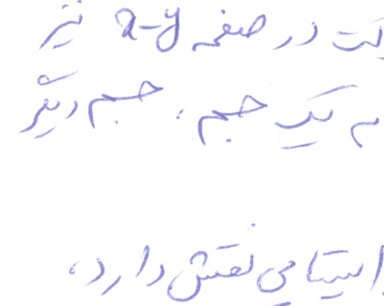
این نتیجه از رابطه (۱۱) نیز برای اجسام صلب که در تماس با هم هستند نیز حاصل می شود. در کلیه مسائل مکانیک که اجسامی به واسطه تماس یا به کمک اتصال توسط نخ ها با هم حرکت می کنند مادامی که ارتباط یاد شده برقرار است باید سرعت و شتاب دو جسم را یکسان در نظر گرفت.

در مورد نیروی کشش نخ می توان دید که اگر رابطه (۱۲) از حالت تساوی خود خارج شود نخ شل می شود و هر کدام از دو جسم حرکت مستقل خود تحت اثر سایر نیروها را خواهند داشت. در این حالت نیروی کشش نخ صفر می شود و عملاً نخ وسیله ای بلا تاثیر خواهد بود. مجدداً تاکید می کنیم که

چنانچه دو جسم با میله صلبی به یکدیگر متصل باشند، این میله و یا هر وسیله دیگری که مشابه آن عمل کند می‌تواند فاصله معینی بین دو جسم را تضمین کند که نه امکان کم شدن و نه امکان زیاد شدن آن هست. چنین وسیله‌ای قید ($x_A - x_B = l =$ ثابت) را تحت هر شرایطی برقرار می‌کند و نقش نیروهای کشش نخ و یا عمودی سطح را توأماً بر عهده خواهد داشت.

نیروی اصطکاک استاتیک نیز برقرارکننده قید معینی است. این قید عبارت از آن است که دو جسم در تماس با هم روی هم سُر نخورند. یک بار دیگر به شکل (۴) که شمای کلی دو جسم در تماس با هم را نشان می‌دهد توجه کنید. فرض کنید محور z عمود بر سطح تماس دو جسم باشد. اگر سطح تماس دو جسم بدون اصطکاک باشد حرکت هر کدام از دو جسم نسبت به دیگری در صفحه x-y امکان‌پذیر است و نیروی عمودی سطح تنها می‌تواند حافظ قید $z =$ ثابت باشد. در حالتی که اصطکاک در سطح کافی باشد و دو جسم روی هم نلغزند، حرکت در صفحه x-y نیز محدود خواهد بود. در این حالت ناظر ساکن نسبت به یک جسم، جسم دیگر را نیز ساکن خواهد دید.

دسته‌ای از مسائل که در آنها نیروی اصطکاک استاتیکی نقش دارد، به حرکتهای غلتشی مربوط است. در این قبیل مسائل یک یا هر دو جسم سطح دوار دارد، مثل استوانه‌ای که روی زمین غلت می‌خورد. در این صورت تماس بین دو جسم در وضعیت ایده‌آل در یک نقطه یا یک خط برقرار است و دو جسم در لحظه تماس روی هم نمی‌لغزند.



شکل ۸

در شکل ۸ مقطع استوانه یا حلقه‌ای که روی سطح افقی در حال حرکت غلتشی است دیده می‌شود. فرض کنید در لحظه t_0 نقطه A

روی سطح استوانه در تماس با سطح افقی قرار دارد. پس از زمان $\Delta t = t_2 - t_1$ نقطه O که مقطع محور استوانه را نشان می دهد به نقطه O' جابه جا شده و فاصله Δx را طی کرده است. در همین مدت استوانه حول محور خود به اندازه زاویه $\Delta\varphi$ دوران کرده و به جای نقطه A نقطه B در تماس با سطح افقی است. شعاعهای حامل نقاط A و B با هم زاویه $\Delta\varphi$ ساخته اند. چنانچه غلتش کامل باشد و نقطه تماس استوانه با سطح افقی سُر نخورد، یعنی از دید ناظر ساکن نسبت به سطح افقی در لحظه تماس ساکن باشد طول Δx و زاویه $\Delta\varphi$ با رابطه زیر به هم مربوط اند

$$\Delta x = R\Delta\varphi \qquad (14)$$

که R شعاع استوانه است. رابطه (14) نیز یک قید است. این رابطه نشان می دهد که در پس از زمان $t_2 - t_1$ کمان AB روی سطح مقطع استوانه به طور کامل روی پاره خط AB در سطح افقی خوابیده است و حرکت به همین ترتیب ادامه می یابد.

نیروی اصطکاک ایستایی ضامن وجود و دوام حرکت غلتشی است. اگر سطوح بدون اصطکاک باشند هر چرخی روی زمین یا درجا می چرخد و یا در حال سُر خوردن کشیده می شود. به عبارت دیگر بدون اصطکاک ایستایی که امکان حرکت غلتشی را فراهم آورد، حرکتهای انتقالی و دورانی استوانه شکل (8) مستقل از یکدیگر خواهند بود. چنانچه نیروی خارجی به جسم وارد شود مرکز جرم آن با سرعت ثابت حرکت خواهد کرد. و چنانچه گشتاور خارجی نیز به جسم وارد نشود سرعت زاویه ای دوران جسم به دور محور خودش نیز ثابت خواهد بود. در غیاب اصطکاک برای جسمی که روی

روی سطح افقی حرکت می‌کند (شکل ۸) چنین شرایطی برقرار است و هیچ رابطه‌ای بین سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای جسم وجود ندارد. این امکان وجود دارد که جسم بدون سرعت زاویه‌ای فقط حرکت انتقالی داشته باشد و نقطه تماس آن با همان سرعت مرکز جرم روی سطح افقی کشیده شود. همچنین برعکس این امکان نیز هست که جسم بدون سرعت خطی با سرعت زاویه‌ای زیاد درجا دوران کند و مرکز جرم آن جابه‌جا نشود. و یا ممکن است هر وضعیت دیگری بین این دو حالت برقرار باشد.

رابطه (۱۴) برای هر بازهٔ زمانی دلخواه Δt برقرار است.
~~[illegible]~~ برای مدت زمان بینهایت کوچک dt می‌توان گفت $dx=Rd\phi$. با تقسیم این رابطه بر dt داریم

$$v=R\omega \quad (۱۵)$$

که v سرعت خطی و ω سرعت زاویه‌ای است.
با مشتق‌گیری مجدد این رابطه نسبت به زمان نیز داریم

$$a=R\alpha \quad (۱۶)$$

در اینجا نیز a شتاب خطی و α شتاب زاویه‌ای است. آنچه بیان کردیم

قیود هولونومیک و غیرهولونومیک -

در مثال‌هایی که ذکر شد در بیشتر موارد قیود مربوط به شکل روابطی روی مختصات مسئله ظاهر شدند. مثلاً وقتی جسم روی سطح افقی حرکت انتقالی دارد، با فرض آنکه سطح مورد نظر، سطح $y=0$ باشد، مختصه y همواره صفر است. رابطه $y=0$ محدودیتی روی مختصات ذره است. و یا وقتی دو جسم با نخ به هم متصل اند و فاصله آنها روی محور x ثابت است، رابطه $x_2-x_1-l=0$ رابطه‌ای روی مختصات اجسام مورد نظر است.

به قیودی که به شکل یک رابطه روی مختصات بیان می‌شوند قیود هولونومیک می‌گویند. هر قیدی که به شکلی دیگر بیان شود قید غیرهولونومیک است. مثلاً رابطه (۱۲) به شکل نامساوی قیدی غیرهولونومیک به حساب می‌آید. همچنین قید $y\geq 0$ برای جسمی که نمی‌تواند در سطح $y=0$ فرو برود، به شکل نامساوی، قید غیرهولونومیک است. وقتی دو جسم با هم در تماس باشند (و نیروی عمود بر سطح در کار باشد) قید $y\geq 0$ به قید هولونومیک $y=0$ تبدیل می‌شود. دسته دیگری از قیود غیرهولونومیک به مسایلی مربوط می‌شود که در آن سرعت اجزای یک دستگاه با یکدیگر مرتبط اند، اما از روابط مربوطه نمی‌توان به رابطه‌ای بین مختصات رسید. در مثال حرکت غلتشی یک چرخ روی سطح زمین رابطه‌ی بین θ به جای‌ها به صورت $dx=Rd\theta$ و یا رابطه نظیر آن بین سرعت‌ها به صورت $\dot{x}=R\dot{\theta}$ قابل انتگرال‌گیری است و می‌توان از آن قید هولونومیک $x-x_0=R(\theta-\theta_0)$ را نتیجه گرفت. مثال‌های پیچیده‌ای را می‌توان طرح کرد که در آنها رابطه بین جا به جایی‌ها قابل انتگرال‌گیری نیست. چنین مثال‌هایی در این درس مورد نظر ما نیست.

مختصات تعمیم یافته —

چنانکه دیدیم ساده‌ترین دستگاه مکانیک کلاسیک، یک ذره‌ای است که با سه مختصه دکارتی $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ توصیف می‌شود. هر دستگاه پیچیده‌تر از ترکیبی از ذرات ساخته می‌شود. یک دستگاه دلخواه از N ذره ساخته شده که مختصات آنها $x_1(t)$، $y_1(t)$، $z_1(t)$، $x_2(t)$ ... $x_N(t)$، $y_N(t)$ و $z_N(t)$ هستند. روی هم $3N$ مختصه داریم که N ممکن است عدد بسیار بزرگی هم باشد. این برای زمانی است که همهٔ ذرات بتوانند آزادانه در فضا حرکت کنند و هیچ قیدی روی حرکت آنها نباشد. اما این امکان وجود دارد که قیودی جبری روی حرکت ذرات وجود داشته باشد که حرکت ذرات را محدود کند.

در این حالت می‌توان مختصات دیگری برای دستگاه معرفی کرد که هیچ قیدی روی آنها وجود نداشته باشد. در بیان ریاضی اگر متغیرهای $r_1, \ldots, r_k$ از هم مستقل نباشند و بین آنها m رابطه به صورت قیود هولونومیک $\varphi_a(r_1 \ldots r_k)=0$ برای $(a=1,\ldots m)$ وجود داشته باشد، علی‌الاصول می‌توان تعداد $n=k-m$ متغیر s_i به دست آورد که از هم مستقل هستند و با داشتن آنها می‌توان متغیرهای اصلی r_α را به دست آورد. به بیان دیگر $r_\alpha = r_\alpha(s_1 \ldots s_n)$ (برای $\alpha=1,\ldots k$). در این حالت هر آرایه از s_i ها به طور یکتا r_α ها را تعیین می‌کند. روشن است که توابع $r_\alpha(s_1 \ldots s_n)$ باید طوری تعریف شده باشند که قیود $\varphi_a(r_1 \ldots r_k)=0$ همواره برقرار باشند. برعکس با داشتن آرایه‌ای از r_α ها می‌توان مجموعه روابط

$$\begin{cases} r_\alpha = r_\alpha(s_1 \ldots s_n) \\ \varphi_a(r_1 \ldots r_k) = 0 \end{cases}$$

را حل کرد و q ها را به صورت توابعی از $\vec{r}_\alpha$ ها به دست آورد.

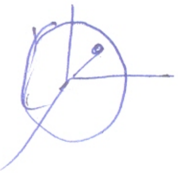
در اینجا متغیرهای اصلی را $x_1,\dots,x_N$ ، $y_1,\dots,y_N$ و $z_1,\dots,z_N$ می‌گیریم.

فرض کنیم قیود هولونومیک دستگاه روابطی به شکل $f_a(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)=0$ برای $(a=1,\dots,M)$ باشند، در این صورت تعداد $n=3N-M$ متغیر به صورت q_i ها را می‌توان گرفت که با داشتن آنها در هر لحظه می‌توان به کمک قیود همه مختصات دکارتی دستگاه را به دست آورد. در بیان برداری می‌توانیم بنویسیم

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1,\dots,q_n,t) \qquad \alpha=1,\dots,N \qquad *$$

به مختصات $q_i(t)$ مختصات تعمیم یافته دستگاه می‌گوییم. مجموعه روابط * را نیز روابط تبدیل از مختصات تعمیم یافته به مختصات دکارتی می‌نامیم. در حالت کلی ممکن است این روابط به طور صریح تابع زمان باشند. برای یک دستگاه حرکت بردار مکان ذرات یعنی $\vec{r}_\alpha$ ها تابع زمان است، در نتیجه مختصات تعمیم یافته نیز تابع زمان است. در واقع برای یک دستگاه شامل قیود، $q_i(t)$ ها متغیرهای دینامیکی نظریه مکانیک کلاسیکی ما هستند.
در یک تعریف رسمی‌تر می‌شود گفت مختصات تعمیم یافته مجموعه متغیرهای مستقلی هستند که به طور یکتا پیکربندی مکانیکی دستگاه را توصیف می‌کنند.

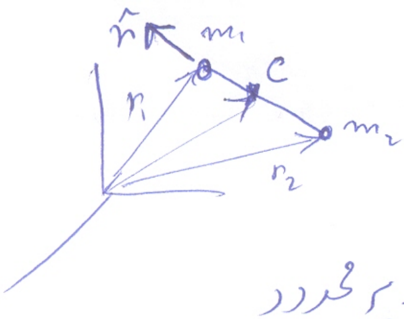
مثال ۱- ذره‌ای مقید به حرکت بر روی سطح یک کره (به شعاع R) است. اگر مبدأ مختصات



را مرکز کره بگیریم، بین سه مختصه دکارتی قید زیر برقرار است:

$$\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0$$

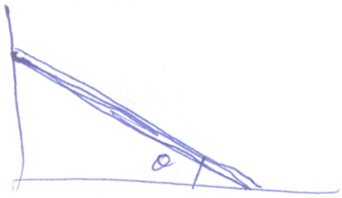
اگر به مختصات کروی برویم این قید به شکل $r-R=0$ در می‌آید و مختصات زاویه‌ای θ و φ آزاد هستند. بنابراین θ و φ مختصات تعمیم یافته این مسئله است.



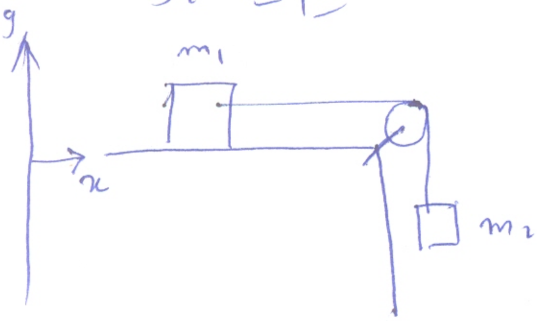
مثال ۲- دو ذره m_1 و m_2 با میله بدون جرمی به طول ثابت l به هم متصل اند. مختصات دکارتی دستگاه x_1، y_1، z_1، x_2، y_2 و z_2 هستند که با قید زیر محدود می شوند

$$\phi(\vec r_1,\vec r_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}-l=0$$

به جای این شش مختصه که با یک قید همراه هستند می توان پنج مختصه تعمیم یافته در نظر گرفت. سه تای اینها می تواند مختصات دکارتی یکی از نقاط میله مثل نقطه c باشد (بعداً خواهیم دید که مناسب‌ترین انتخاب آن است که c را مرکز جرم دستگاه بگیریم). دو مختصه دیگر باید جهت گیری میله را در فضا نشان دهد. مثلاً زوایای قطبی θ و ϕ که جهت گیری بردار یکه $\hat n=\frac{(r_1-r_2)}{|r_1-r_2|}$ را مشخص می کند انتخاب مناسبی است.



مثال ۳- شکل ... میله ای را نشان می دهد که بین یک دیوار قائم و سطح افقی به طور مایل قرار گرفته و امتداد میله با سطح افقی زاویه θ می سازد. این دستگاه از تعداد بیشماری ذره ساخته شده که فواصل آنها از هم ثابت است (جسم صلب). اما روشن است که با داشتن زاویهٔ θ در هر لحظه پیکربندی دستگاه کاملاً مشخص می شود. بنابراین θ تنها مختصه تعمیم یافته دستگاه است.

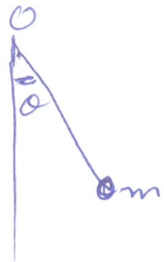


مثال ٤- در شکل مقابل دو جسم m_1 و m_2 با نخی که از روی قرقره ثابت عبور کرده به هم متصل اند. روشن است که از سه مختصه دکارتی

مربوط به جسم m_1 فقط مختصه x_1 مهم است. مختصه y_1 با قید $y_1=0$ کنار گذاشته شده و مختصه z_1 نیز به دلیل شرایط اولیه مسئله به میان نیامده است. در مورد جسم m_2 نیز فقط مختصه y_2 اهمیت دارد. مختصات x_2 و z_2 به میان نیامده اند چون فرض نوسان کردن نخ قائم را در نظر نگرفته ایم و تلویحاً فقط حرکت نخ در امتداد y به حساب آمده است. اما همین دو مختصه نیز با قید ثابت بودن طول نخ به هم وابسته اند. بنابراین قید داریم

$$x_1 - y_2 = \text{ثابت}$$

بنابراین دستگاه فوق فقط یک مختصه تعمیم یافته دارد که می توان آنرا x_1 یا y_2 گرفت.



مثال ۵-۲ آونگ - یک آونگ ساده از جرم نقطه ای m که به نخی به طول ثابت l متصل است تشکیل شده که انتهای نخ به نقطه تعلیق ثابت O متصل است.

تحت اثر نیروی گرانش آونگ می تواند نوسان کند. اگر چرخش دستگاه حول محور قائم را در نظر نگیریم، تنها حرکت ممکن به زاویه θ که زاویه انحراف آونگ از امتداد قائم است مربوط می شود. روشن است که مختصه تعمیم یافته θ برای توصیف دستگاه بسیار بهتر از مختصات دکارتی جرم m است. اگر دستگاه امکان چرخش حول محور قائم را نیز داشته باشد دو مختصه θ و φ برای توصیف آن لازم است. به دستگاه در این حالت آونگ کروی می گوییم.

این بخش بعداً در ذیل قوانین نیوتن جای داده خواهد شد

جرم و مقدار ماده -

در بخش (۲-۴) جرم هر جسم را متناسب با اینرسی جسم در برابر حرکت تعبیر کردیم. جسم سنگین‌تر در برابر یک نیروی مشخص کُند شتاب می‌گیرد. سپس در بخش (۲-۵) دانستیم که جرم جسم با تعبیر فوق با بار گرانشی اجسام متناسب است و با انتخاب مناسب واحدها این دو کمیت را می‌توان یکسان گرفت.

اما در کنار این دو مفهوم، در برداشت متعارف و شهودی ما مفهوم دیگری از جرم نیز در اذهان ما وجود دارد. در این مفهوم ساده، جرم هر جسم با مقدار ماده موجود در آن متناسب است. به عنوان مثال در یک کیلوگرم از ماده مشخصی مثل شیر دو برابر نیم کیلوگرم، شیر وجود دارد، و یا در دو کیلوگرم برنج دو برابر یک کیلوگرم برنج، برنج وجود دارد... به طوری که اگر شمارش کنیم دقیقاً جرم مثلاً دو هزار عدد برنج دو برابر جرم هزار عدد برنج است (با فرض آنکه همه برنج‌ها مشابه باشند). ببینیم این مفهوم در چه مشاهده ای ریشه دارد.

آزمایش شکل .... را در نظر بگیرید. فرض کنید جرم معین m در سر هم کشش با فنری که به اندازه معینی کشیده شده است

شتاب a_m داشته باشد. اگر جسم کاملاً مشابهی به جسم قبلی متصل کنیم و شتاب جسم حاصل را بسنجیم آزمایش نشان می دهد که شتاب جسم مرکب اخیر درست $\frac{1}{2}a_m$ است. بنا به تعریف جرم از خاصیت لختی نتیجه می گیریم که جرم جسم اخیر $2m$ است. به بیان دیگر با دو برابر شدن مقدار ماده جرم دستگاه نیز دو برابر می شود. به همین ترتیب اگر از اندازه گیری شتاب جرم جسمی m_1 باشد و جرم جسم دیگر m_2 باشد با متصل کردن این دو جسم به هم و اندازه گیری شتاب جسم حاصل براثر نیروی معین، جرم جسم اخیر m_1+m_2 خواهد بود. به همین دلیل این خاصیت را جمع پذیری جرم می نامیم.

دقت کنید که این حقیقت به هیچ وجه ناشی از نوع تعریف ما از جرم نیست بلکه یک واقعیت تجربی است که همهٔ آزمایشهای فیزیک، البته در مقیاسهای ماکروسکپی آنها را تایید می کند. می توانست قانون طبیعت غیر از این باشد. به دلیل این خاصیت ما در تمام مبادلات اقتصادی برای سنجش مقدار ماده ای که مبادله می کنیم جرم آنها را می سنجیم. هرچند در سنجش هایمان از اندازه گیری شتاب جسم براثر نیروی معین استفاده نمی کنیم، بلکه از سنجش نیروی وزن زمین بر روی جسم، که می دانیم با جرم آن متناسب است، استفاده می کنیم. این یعنی همان کاری که ترازو انجام می دهد.

جالب اینجاست که آزمایشهای دقیق تر در مقیاس میکروسکپی نشان می دهد که اتفاقاً گزاره فوق کاملاً دقیق نیست. به این

معنی که جرم جسمی که از پیوند دو جسم به جرمهای m_1 و m_2 تشکیل می شود دقیقاً نسبت m_1+m_2 و به اندازهٔ E/c^2 با آن اختلاف دارد که E تغییر انرژی دستگاه نسبت به وقتی است که m_1 و m_2 از هم جدا هستند. به عنوان مثال اگر پروتنی به جرم $m_1= \ldots$ kg با نوترونی به جرم $m_2= \ldots$ kg برهم کنش کند و پیوند برقرار کند ذره ای به نام دوتریم با جرم $M= \ldots$ kg تشکیل می شود و داریم

$$E=(M-m_1-m_2)c^2= \ldots \; J$$

این مقدار انرژی درست برابر است با مقدار انرژی که از پیوند یک پروتن با یک نوترون و تشکیل یک دوتریوم به دست می آید.
به همین ترتیب اگر یک الکترون و یک پروتن تشکیل اتم هیدروژن (در حالت پایه) بدهند به اندازهٔ $E=13.6eV$ انرژی آزاد می کنند که ناشی از تغییر پیکربندی دستگاه از الکترون و پروتن جدا به یک اتم هیدروژن است و در عین حال جرم دستگاه حاصل به اندازه E/c^2 نسبت به مجموع جرم یک الکترون آزاد و یک پروتن آزاد کمتر است.
توجه داشته باشید که برخلاف تصور رایج این امر به معنی تبدیل جرم به انرژی نیست. در یک اتم هیدروژن کماکان یک الکترون و یک پروتن حضور دارند بدون آنکه هیچ بخشی از آنها ناپدید شده باشد. تغییر انرژی سیستم ناشی از برهم کنش الکترومغناطیسی آنهاست وگرنه هیچ بخشی از ماده باصطلاح تبخیر نشده تا به انرژی تبدیل شده باشد.

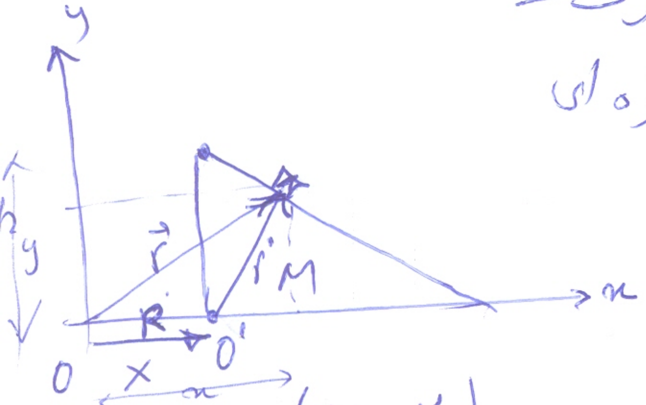
اگر از اساس توجه داشته باشیم که مفهوم جرم لزوماً به معنی مقدار ماده نیست و تناسب این دو کمیت صرفاً یک مشاهده تجربی برای ذرات ماکروسکپی است، آنگاه تعجب نخواهیم کرد که جرم یک دستگاه میکروسکپی مرکب از چند ذره را مجموع جرم اجزای آن ندانیم. متناسب بودن تفاوت یعنی Δm، جرم دستگاه مرکب با مجموع جرم اجزای آن، با تغییر انرژی متناظر با پیکربندی دستگاه از نظریه نسبیت خاص توجیه می‌شود و موضوع بحث فعلی ما نیست.

اما تاکید ما آن است که رابطه $\Delta E=\Delta m c^2$ به معنای آنکه ماده محو شده و تبدیل به انرژی شده است، نیست.

۲-۶- چند مثال آموزنده

در این بخش می خواهیم چند مثال تفصیلی که در آن کاربرد قوانین نیوتن، نیروهای قیدی و قیود مکانیکی و نقش آنها در دینامیک مسئله برجسته تر نشان داده می شود را بررسی کنیم

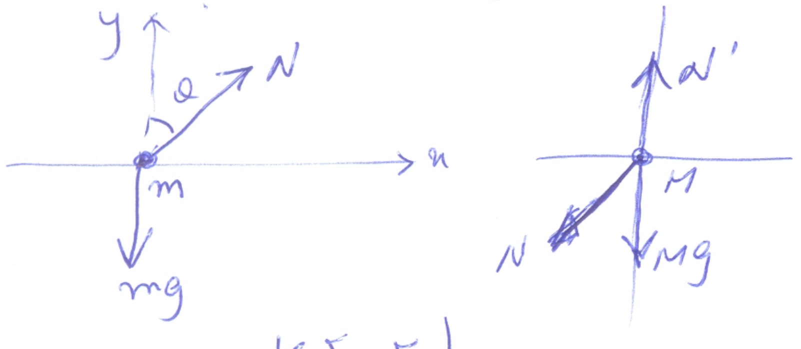
مثال ۱- سرخوردن جسم روی گوه متحرک-



(۲-۴۱)

دستگاه مسئله از جرم کوچک m که روی گوه ای به جرم M مطابق شکل (۲-۴۱) بدون اصطکاک سر می خورد تشکیل شده است. جرم M نیز بدون اصطکاک می تواند روی سطح افقی حرکت کند. می خواهیم مولفه های شتاب جرم m و شتاب افقی جرم M را به دست آوریم. (این مسئله را از روشهای گوناگون از جمله استفاده از نیروهای مجازی و یا استفاده از قانون پایستگی تکانه می توان ساده تر حل کرد. اما در اینجا هدف کاربرد مستقیم قوانین نیوتن و بیان قید نسبتاً پیچیده مسئله است).

چون جرم های m و M فقط حرکت انتقالی دارند با آنها مشابه ذره رفتار می کنیم. نمودار جسم آزاد برای هر یک از آنها مطابق شکل (۲-۴۲) است.



(۲-۴۲)

نیروی عمل و عکس العمل بین m و M را با N نشان داده ایم که چون اصطکاک

نداریم عمود بر سطح شیبدار است. N' نیروی عمودی است که سطح افقی زیر گوه M به آن وارد می‌کند. برخلاف معمول مسائل سطح شیبدار برای جرم m محورهای مختصات را در استدار افق و عمود بر افق می‌گیریم.

با استفاده از قوانین حرکت نیوتن داریم

$$\begin{cases} N\cos\theta - mg = m\ddot{y} \\ N\sin\theta = m\ddot{x} \\ -N\sin\theta = M\ddot{X} \\ N' - N\cos\theta - Mg = 0 \end{cases} \qquad (۱۰۰-۲)$$

در این روابط $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ مؤلفه‌های شتاب جرم m و $\ddot{X}$ شتاب افقی جرم M است. یک قید مسئله را پیشاپیش اعمال کردیم و آن این است که جرم M شتاب عمودی ندارد. متناظر با این قید نیروی قیدی N' را داریم که اندازه آن از معادله آخر پس از حل کامل مسئله به دست می‌آید. تا اینجا ٤ معادله داریم و ٥ مجهول که عبارتند از N' ، N ، $\ddot{x}$ ، $\ddot{y}$ و $\ddot{X}$. هنوز رابطه قیدی مربوط به حرکت جرم m روی سطح شیبدار را اعمال نکرده‌ایم. از شکل (۲-٤۱) روشن است که $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$ ، که r' بردار مکان m نسبت به نقطه O' است. در دستگاه مختصات ساکن نسبت به گوه (که یک دستگاه غیرلخت است) جرم m روی خطی به شیب $(-\tan\theta)$ و عرض از مبدأ h حرکت می‌کند. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} x &= x' + X \\ y &= y' \\ y' &= (-\tan\theta)x' + h \end{aligned} \Longrightarrow y = (-\tan\theta)(x - X) + h \qquad (۱۰۱-۲)$$

این رابطه قیدی است (هولونومیک) میان مختصات اولیه x، y و X. با دو بار مشتق گیری از آن خواهیم داشت

$$\ddot{y} = (-\tan\theta)(\ddot{x} - \ddot{X}) \qquad (۱۰۲-۲)$$

دقت کنید که ما فقط حق داریم قانون دوم نیوتن را از دید ناظر لخت که مبدأ آن O است بنویسیم. از دید ناظر غیر لخت به مبدأ O' نمی‌توان قانون نیوتن نوشت (مگر آنکه نیروهای مجازی را دخالت دهیم که بعداً بحث خواهیم کرد).

با جمع کردن روابط دوم و سوم (۱۰۰-۲) از روابط (۲-۱۰۰) داریم

$$\ddot{X} = -\frac{m}{M}\ddot{x} \qquad (۱۰۳-۲)$$

(این رابطه را مستقیماً از پایستگی تکانه خطی سیستم نیز می‌توان به دست آورد).

با قرار دادن $\ddot{X}$ در رابطه (۲-۱۰۲) به دست می‌آید

$$\ddot{y} = -\tan\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)\ddot{x} \qquad (۱۰۴-۲)$$

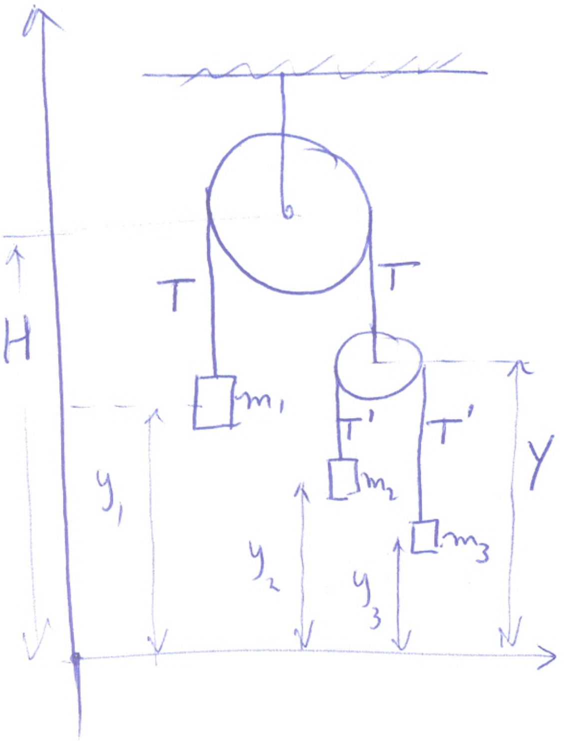
با اعمال این نتیجه در رابطه نخست (۲-۱۰۰) و حذف N بین آن رابطه و رابطه دوم، نهایتاً خواهیم داشت

$$\ddot{x} = \frac{g\sin\theta\cos\theta}{1 + \frac{m}{M}\sin^2\theta} \quad \text{و} \quad N = \frac{mg\cos\theta}{1 + \frac{m}{M}\sin^2\theta} \qquad (۱۰۵-۲)$$

از این روابط با قرار دادن در (۲-۱۰۳) و (۲-۱۰۴) مجهول‌های $\ddot{X}$ و $\ddot{y}$ به دست می‌آید. با قرار دادن N در رابطه آخر (۲-۱۰۰)، N' نیز محاسبه می‌شود.

نکته آموزنده این مثال آن است که جواب‌های کلیشه‌ای از نوع

$N = mg\cos\theta$ و یا $a = g\sin\theta$ فقط برای موارد خاص خود صحیح است و به محض رویت سطح شیبدار نمی‌توان آنها را به کار برد.



(۴۴-۲)

مثال ۲-

در دستگاه شکل (۲-۴۴) شتاب جرم‌ها و کشش نخ‌ها را به دست آورید. جرم قرقره‌ها و نخ ناچیز است.

ابتدا یادآوری کنیم که با در نظر گرفتن نیروهای وارد به یک تکه نخ با جرم ناچیز در می‌یابیم که نیروی کشش نخ در طول هر ریسمان ثابت است.

همین طور اگر قرقره‌ها جرم ناچیزی داشته باشند کشش نخ در دو سمت آنها برابر است (بعداً با در نظر گرفتن معادله حرکت دورانی قرقره‌ها این مطلب را به دقت نشان خواهیم داد).

مختصات جرم‌ها مطابق شکل (۲-۴۴) y_1، y_2 و y_3 است. مختصه قرقره متحرک نیز Y نامیده شده است. معادله حرکت نیوتن برای این چهار جرم چنین است

$$
\begin{cases}
T_1 - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \\
T - 2T' = 0 \\
T' - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \\
T' - m_3 g = m_3 \ddot{y}_3
\end{cases}
$$

(۲-۱۰۶)

چهار معادله داریم و ۵ مجهول که عبارتند از T، T'، $\ddot{y}_1$، $\ddot{y}_2$ و $\ddot{y}_3$. نکته مهم

این شامل قیود مسئله است. معمولاً در این قبیل مسایل که با نخ‌های کشیده شده سروکار داریم قید آن است که طول نخ ثابت است. برای دو تکه نخ موجود در مسئله این دو قید هولونومیک را می‌توان نوشت

$$H - y_1 + \pi R_1 + H - y = l_1 \quad \text{~~طول نخ روی قرقره ثابت~~}$$

(۲-۱۰۷)

$$y - y_2 + \pi R_2 + y - y_3 = l_2 \quad \text{~~طول نخ روی قرقره متحرک~~}$$

H ارتفاع مرکز قرقره ثابت از مبدأ و R_1 و R_2 به ترتیب شعاع‌های قرقره ثابت و متحرک و l_1 و l_2 به ترتیب طول نخ‌های روی قرقره ثابت و متحرک هستند. با دوبار مشتق‌گیری از قیود (۲-۱۰۷) داریم

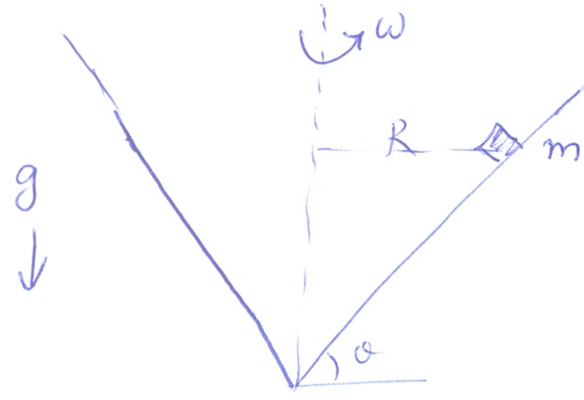
$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \ddot{y} = 0 \\ 2\ddot{y} - \ddot{y}_2 - \ddot{y}_3 = 0 \end{cases} \qquad (۲-۱۰۸)$$

چنانکه می‌بینیم جزئیاتی از قبیل طول نخ‌ها و شعاع قرقره‌ها در دینامیک مسئله اهمیتی ندارند. از روابط (۲-۱۰۸) با حذف $\ddot{y}$ داریم

$$\ddot{y}_1 = -\frac{1}{2}(\ddot{y}_2 + \ddot{y}_3) \qquad (۲-۱۰۹)$$

چهار رابطه (۲-۱۰۶) و رابطه (۲-۱۰۹) پنج معادله برای ۵ مجهول ذکر شده تشکیل می‌دهند که حل آنها به جواب‌های زیر منتهی می‌شود:

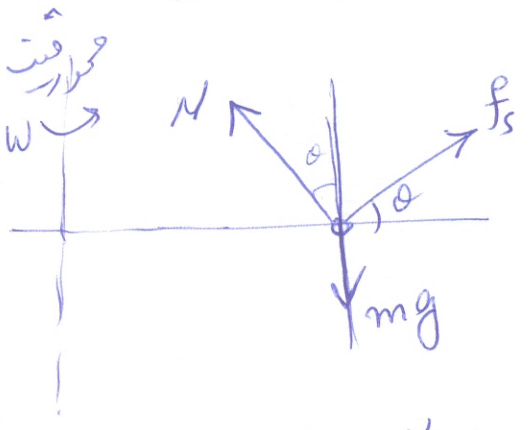
مثال ۳-



(۲-۴۴)

در شکل (۲-۴۴) قیف بزرگی را نشان می دهد که حول محور تقارن خود که در امتداد قائم است، با سرعت زاویه ای ثابت ω دوران می کند.

قطعه کوچکی به جرم m روی بدنه قیف قرار دارد و به واسطه اصطکاک ایستایی همراه قیف روی دایره‌ای ~~در ارتفاع~~ به شعاع R می چرخد. دیواره قیف با امتداد افق زاویه θ می سازد و ضریب اصطکاک ایستایی μ_s است. به ازای مقادیر مختلف پارامترها، محدوده ω برای آنکه جسم روی قیف ساکن بماند را به دست آوریم.



۴۵ - ۲

در شکل ۲ - ۴۵ نمودار آزاد نیروها را رسم کرده ایم. ابتدا نمی دانیم جهت نیروی اصطکاک ایستایی به کدام سمت است. فعلا فرض کنید جهت f_s رو به بالای قیف است و از سر خوردن جسم به پایین جلوگیری می کند. معادلات حرکت نیوتن در راستای قائم و افقی چنین است

$$\begin{cases} N\cos\theta + f_s\sin\theta - mg = 0 \\ N\sin\theta - f_s\cos\theta = mR\omega^2 \end{cases} \qquad (۲-۱۱۰)$$

رابطه نخست بیانگر خواسته صورت مسئله است که جرم نسبت به قیف ساکن بماند و بالا یا پایین نرود. در این مثال هیچ شتابی مجهول نیست. جسم شتاب قائم ندارد و شتاب افقی آن نیز به تبعیت از حرکت قیف

به $R\omega^2$ به سمت محور است. از حل معادلات (۲-۱۱۰) داریم

$$N = m(g\cos\theta + R\omega^2\sin\theta) \qquad (۲-۱۱۱)$$
$$f_s = m(g\sin\theta - R\omega^2\cos\theta)$$

توجه داشته باشید که f_s و N دو ~~مستقل از هم~~ نیروی قیدی مستقل از هم هستند که یکی قید فرو نرفتن جسم در سطح و دیگری قید سر نخوردن جسم روی سطح را تضمین می‌کند. دقت کنید که از رابطه‌ای به صورت $f_s=\mu_s N$ که متناظر با آستانهٔ سرخوردن جسم است استفاده نمی‌کنیم. در عوض این دو نیرو باید نامساوی $f_s \le \mu_s N$ را ارضا کنند. با قرار دادن نتایج (۲-۱۱۱) در این نامساوی داریم

$$m(g\sin\theta - R\omega^2\cos\theta) \le \mu_s m(g\cos\theta + R\omega^2\sin\theta)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\omega^2 \ge \frac{g}{R}\,\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\mu_s\sin\theta + \cos\theta} \qquad (۲-۱۱۲)$$

کمینه ω از این رابطه خوانده می‌شود

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\mu_s\sin\theta + \cos\theta}} \qquad (۲-۱۱۲)$$

اگر $\tan\theta < \mu_s$ باشد صورت عبارت سمت راست (۲-۱۱۲) منفی است و نامساوی حالت بدیهی خواهد داشت، یعنی کمینه‌ای برای ω نداریم. این بدان معناست که اگر زاویه θ به اندازه کافی کوچک باشد (از $\tan^{-1}\mu_s$ کمتر باشد) حتی اگر قیف متوقف شود جسم به پایین سر نمی‌خورد. در حالت حدی $\theta=0$ هرگز جسم به پایین سر نمی‌خورد.

با افزایش تدریجی ω از مقدار کمینه آن در رابطه (۲-۱۱۴) ~~[illegible]~~ به مقداری از ω می‌رسیم که f_s در رابطه (۲-۱۱۱) صفر می‌شود. این مقدار را ω_0 می‌نامیم:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R}\tan\theta \qquad (۲-۱۱۴)$$

اگر ω از این هم بیشتر شود جهت f_s تغییر می‌کند تا این بار از سر خوردن جسم به سمت بالا جلوگیری کند. در این حالت علی‌القاعده باید مسئله را از ابتدا با f_s رو به پایین حل کنیم. اما عملاً در اینجا نیازی به تکرار کل فرایند نیست. فقط کافی است f_s را به $-f_s$ تبدیل کنیم و نتایج (۲-۱۱۱) را تصحیح کنیم:

$$\begin{aligned} N &= m(g\cos\theta + R\omega^2\sin\theta) \\ f_s &= m(R\omega^2\cos\theta - g\sin\theta) \end{aligned} \qquad (۲-۱۱۵)$$

در این حالت از نامساوی $f_s \le \mu_s N$ داریم

$$\omega^2 \le \frac{g}{R}\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} \qquad (۲-۱۱۶)$$

که بیشینهٔ ω را از آن می‌شود خواند

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}} \qquad (۲-۱۱۷)$$

در اینجا نیز انتظار داریم مخرج کسر (۲-۱۱۶) و بنابراین رادیکال عبارت (۲-۱۱۷) منفی نباشد. در واقع اگر $\cos\theta-\mu_s\sin\theta<0$ باشد مرحله قبل از نامساوی (۲-۱۱۶) به صورت $\omega^2(\cos\theta-\mu_s\sin\theta)\le\frac{g}{R}(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)$ به ازای هر

مقدار ω به طور بدیهی برقرار است و هیچ ω بیشینه‌ای نداریم. در واقع اگر زاویه شیب سطح از مقدار معین $\cot^{-1}\mu_s$ بزرگتر باشد، هر چقدر هم که سرعت زاویه‌ای را زیاد کنیم جسم بیشتر به سطح می‌چسبد و هرگز روی آن سر نمی‌خورد. برای حالت حدی $\theta = \frac{\pi}{2}$ که همان مثال معروف گردونه است، افزایش سرعت زاویه‌ای مقدار N را بزرگ می‌کند و شرایط تحقق $\mu_s N \geq f_s$ هیچوقت به هم نمی‌خورد.
