فصل سوم

روشهای کلی حل معادلات حرکت

بررسی دینامیک دستگاه با به کار گرفتن قوانین نیوتن تمام نمی شود. در هر مسئله مکانیک گام اول ~~[illegible]~~ در نظر گرفتن نیروها با توجه به قوانین نیروی شناخته شده، و سپس نوشتن معادلات حرکت نیوتنی و نیز قیود دستگاه است. اما این فقط آغاز کار است. معادلات نیوتن شتابها را برحسب متغیرهای مختلف مسئله بیان می کند. این معادلات را باید حل کرد و از آن بستگی مختصات دینامیکی دستگاه را به زمان به دست آورد. در این فصل می خواهیم شیوه های مختلف این فرایند را بررسی کنیم.

۳-۱- قضیه کلی وجود و یکتایی حل.

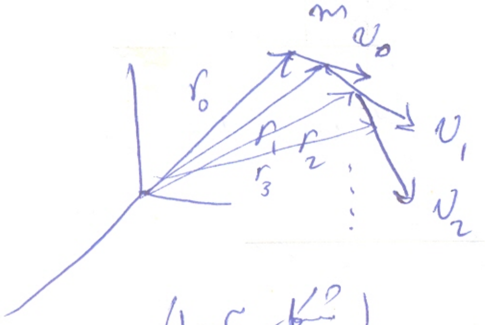
در ابتدا برای سهولت ذره ای به جرم m را در مختصات دکارتی در نظر می گیریم. فرض کنید این ذره تحت اثر نیروی برآیند F قرار گرفته که با استفاده از قوانین نیرو می توانیم آن را به صورت تابع معینی از مکان و سرعت ذره و سایر پارامترهای ذره و محیط که ثابت اند، بیان کرد. هیچ قانون نیروی معینی را نمی شناسیم که در آن F تابعی از مشتق های بالاتر ~~[illegible]~~ مختصات ذره نسبت به زمان باشد. یعنی حداکثر همین مختصات و سرعت هستند که در F ظاهر می شوند.

بنابراین شکل کلی معادله حرکت یک ذره چنین است

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t, \ldots) \qquad (۳-۱)$$

که در آن علامت ... فقط معرف پارامترهای ثابت (مثل جرم، شتاب گرانش، بار الکتریکی، بزرگی میدان الکتریکی یا مغناطیسی خارجی و امثال) است. معادله (۲-۱) در واقع سه معادله دیفرانسیل مرتبه دو است که $\ddot{x}$، $\ddot{y}$ و $\ddot{z}$ را بر حسب x، y و z و نیز $\dot{x}$، $\dot{y}$ و $\dot{z}$ بیان می‌کند. به همین جهت علی‌الاصول نظریه مکانیک کلاسیک به طور گریزناپذیری با بحث حل معادلات دیفرانسیل درهم آمیخته است.

دینامیک یک دستگاه قابل تجزیه و تحلیل نیست مگر آنکه بتوانیم معادلات دیفرانسیل (۲-۱) را به طور دقیق حل کنیم. ولی آیا همیشه حل دقیقی برای معادله‌های (۲-۱) وجود دارد. فعلاً با یک استدلال کلی نشان می‌دهیم که علی‌الاصول چنین حلی وجود دارد.



(شکل ۲-۱)

فرض کنیم ذره m در لحظه $t=0$ در محل $\vec{r}_0$ قرار دارد و سرعت اولیه آن $\vec{v}_0$ است. (شکل ۲-۱)

بعد از گذشت زمان بینهایت کوچک δt جابجایی ذره تقریباً برابر است با $\delta\vec{r}_1 = \vec{v}_0\,\delta t$ و مکان ذره پس از این مدت برابر است با $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \delta\vec{r}_1$. در واقع فرض کرده‌ایم δt آنقدر کوچک است که سرعت ذره در این مدت تقریباً ثابت و همان $\vec{v}_0$ است. در طی این مدت نیروی برآیند F نیز تقریباً ثابت و برابر است با $F(r_0, v_0, \ldots)$. بنابراین پس از مدت کوچک δt تغییر سرعت ذره از معادله (۲-۱) برابر است با $\delta\vec{v}_1 = \frac{1}{m}\vec{F}(r_0,v_0,\ldots)\,\delta t$ و سرعت جدید ذره پس از این مدت $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \delta\vec{v}_1$ است. حال مجدداً می‌توان زمان کوچک δt دیگری را سپری کرد که در آن جابجایی ذره $\delta\vec{r}_2 = \vec{v}_1\,\delta t$ و تغییر سرعت ذره $\delta\vec{v}_2 = \frac{1}{m}F(r_1,v_1,\ldots)\,\delta t$ است. بنابراین پس از $2\delta t$ بردار مکان جدید ذره $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \delta\vec{r}_2$ و بردار سرعت جدید ذره $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \delta\vec{v}_2$ است

به همین ترتیب می توان گام به گام مسئله را جلو برد و در هر لحظه مکان و سرعت ذره را به دست آورد. می توانیم به طور نظری هر قدر که می خواهیم δt را کوچک فرض کنیم و با هر دقت دلخواه $\vec{r}(t)$ و $\vec{v}(t)$ را برای همه زمانها تعیین کنیم. این روش را می توان عملاً هم در محاسبات عددی به کار گرفت و با استفاده از رایانه حل معادلات حرکت را به دست آورد. با استفاده از ماشین های محاسب قوی تر می توان گام زمانی δt را کوچکتر گرفت و با دقت بیشتری مسیر را به دست آورد. در این جا چند نکته قابل ذکر است

۱- برای داشتن یک جواب یگانه باید $\vec{r}_0$ و $\vec{v}_0$ را داشت. به بیان دیگر معادلات حرکت (۷-۱) که ~~معادلات~~ سه معادله دیفرانسیل مرتبه دو هستند برای داشتن یک جواب یکتا به شش ثابت اولیه نیاز دارند. برای حالت خاصی که ذره در یک بعد حرکت کند یک معادله حرکت داریم که معادله دیفرانسیل مرتبه دو است و برای حل یکتا به دو ثابت اولیه (مثلاً x_0 و v_0) احتیاج دارد. ممکن است ثابت های اولیه، یا بهتر بگوییم ثابتهای دستگاه را کمیت های دیگری نیز گرفت. مثلاً اگر مکان ذره را در دو لحظه t_1 و t_2 داشته باشیم باز هم دوباره شش ثابت داریم و حل مسئله یکتاست.

۲- در مکانیک کوانتمی مسیر ذره مفهوم ندارد. سوال این است که کجای برنامه فوق اشکال دارد که نمی توان مسیر برای ذره به دست آورد. جواب این است که در هر گام نخست امکان تعیین مکان و سرعت ذره در لحظه ابتدای حرکت وجود ندارد. اگر مکان ذره را به طور دقیق بدانیم آنگاه اطلاع ما از سرعت ذره بسیار ناچیز است. در نتیجه نمی دانیم

که ذره در لحظه بعدی کجاست. به این ترتیب اطلاعی از مکان آن در لحظات بعد نیز نخواهیم داشت. همچنین اگر سرعت ذره را به دقت معلوم کنیم آنگاه دقتی روی جای ذره نداریم و ذره می‌تواند هر جا باشد. البته یادآوری می‌کنیم که در مکانیک کوانتمی اصولاً متغیرهای دینامیکی کمیتهایی مثل مکان یا سرعت ذره نیست و کمیتهای دیگری است.

۳-۳ آنچه در این بخش برای اثبات وجود و یگانگی حل معادله حرکت برای یک ذره بیان شد در حالت کلی قابل تعمیم به هر دستگاه دینامیکی دیگری که با مختصات تعمیم یافته $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ توصیف می‌شود هست. در واقع ما همواره برای N ذره تعداد $3N$ رابطه از قانون نیوتن داریم. اما تعداد مجهولات ما شامل $3N$ مؤلفه شتابها با اضافه نیروهای قیدی است. تعداد نیروهای قیدی درست برابر تعداد قیود است. به این ترتیب در دستگاه کلی برای N ذره تعداد $3N+M$ معادله برای $3N+M$ مجهول داریم که شامل کلیه شتابها و نیروهای قیدی است. معمولاً برای محاسبه شتابها ابتدا نیروهای قیدی را از معادلات حذف می‌کنیم و به تعداد شتابهای مجهول در مسئله معادله داریم. مثلاً در مثال جسمی که روی سطح شیبدار به پایین می‌لغزد دو معادله برای حرکت در راستای x و y داریم در کنار قید $y=0$ (اگر محور x منطبق بر سطح شیبدار باشد) روی هم که سه معادله خواهند بود برای a_x، a_y و نیروی قیدی N.

با در نظر گرفتن مختصات تعمیم یافته این امکان وجود دارد که از ابتدا M تا از مختصات که قیود مسئله آنها را ثابت انگاشته است کنار بگذاریم و تنها معادلاتی را بنویسیم که برای مختصات تعمیم یافته

دستگاه است. به این ترتیب از تعداد معادلات و مجهول ها $2M$ که می شود. یعنی دقیقاً $n=3N-M$ معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ برای n مختصه تعمیم یافته دستگاه داریم. خواننده به راحتی می تواند صحت مطالب این فراز را در مثال های متعدد مکانیکی با شمارش تعداد معادلات و ~~و~~ مجهول ها بسنجد. در فصل های آینده خواهیم دید که فرمولبندی لاگرانژی از مکانیک کلاسیک به طور خودکار این وظیفه را انجام می دهد. یعنی معادلات زاید دستگاه را حذف می کند و فقط به تعداد مختصات تعمیم یافته دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه دو به ما می دهد.

با استدلالی مشابه استدلال فوق برای یک ذره به راحتی می توان نشان داد که با طی کردن گام های زمانی δt می توان با داشتن شتابهای $\ddot{q}_i$ بر حسب مختصات q_i و سرعتهای $\dot{q}_i$ از حالت اولیه دستگاه که مختصات آن q_{i0} و سرعتهای آن $\dot{q}_{i0}$ است شروع کرد و قدم به قدم دستگاه را در فضای پیکربندی جلو برد.

۳-۲ حل مسایل با نیروی ثابت

در فیزیک مقدماتی اغلب مسایل با نیروهای ثابت سروکار دارند و آنچه خواسته می شود یافتن شتابهای اجزاء دستگاه است. برای یک ذره قانون نیوتن برای نیروی برآیند ثابت $\vec{F}$ به روابط زیر منجر می شود

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F_x \qquad (۳-۲)$$
$$\ddot{y} = \frac{1}{m} F_y$$
$$\ddot{z} = \frac{1}{m} F_z$$

معادلات (۳-۲) ساده‌ترین نوع معادلات دیفرانسیل قابل تصور است. با یک بار انتگرال‌گیری از این معادلات داریم

$$v_x(t) = \dot{x} = \frac{F_x}{m} t + v_{0x}$$
$$v_y(t) = \dot{y} = \frac{F_y}{m} t + v_{0y} \qquad (۳-۳)$$
$$v_z(t) = \dot{z} = \frac{F_z}{m} t + v_{0z}$$

کمیت‌های v_{0x}، v_{0y} و v_{0z} ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. با قرار دادن $t=0$ در روابط فوق داریم $v_x(0)=v_{0x}$، $v_y(0)=v_{0y}$ و $v_z(0)=v_{0z}$، یعنی v_{0x}، v_{0y} و v_{0z} مؤلفه‌های سرعت اولیه دستگاه، $\vec{v}_0$، هستند. با یک بار دیگر انتگرال‌گیری از معادلات (۳-۳) داریم

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_x}{m}\right)t^2 + v_{0x} t + x_0$$
$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_y}{m}\right)t^2 + v_{0y} t + y_0 \qquad (۳-۴)$$
$$z(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_z}{m}\right)t^2 + v_{0z} t + z_0$$

مجدداً ثابت‌های انتگرال‌گیری x_0، y_0 و z_0 مؤلفه‌های مکان اولیه ذره، $\vec{r}_0$، هستند که با قرار دادن $t=0$ در روابط فوق حاصل می‌شوند. روابط (۳-۳) و (۳-۴) را می‌شود به شکل بستهٔ برداری زیر نیز نوشت

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{m}\vec{F} t + \vec{v}_0 \qquad (۳-۵)$$
$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2m}\vec{F} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

با محاسبهٔ مستقیم می‌توان t را بین روابط (۳-۵) حذف کرد. کافی است v^2 را از رابطه اول حساب کنیم و $2\frac{\vec{F}}{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)$ را از رابطه دوم به دست آوریم. نتیجه چنین است

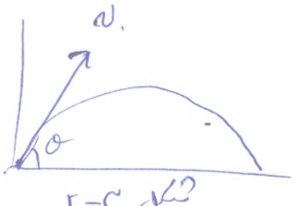
$$v^2 - v_0^2 = 2\frac{\vec{F}}{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad (۳-۶)$$

خواننده احتمالاً در فیزیک مقدماتی انبوهی از مثال‌ها که در آن شتاب ثابت است دیده و مهارت کافی در حل مسایل مربوط به آنها کسب کرده است.

از جمله مثال‌های مربوط به سقوط آزاد در شتاب گرانش (که در آن $F/m = g$ است)، حرکت پرتابی و حرکت در میدان الکتریکی یکنواخت، برای خواننده آشناست و ما از تکرار آنها پرهیز می‌کنیم.

نکته بسیار مهمی که لازم به تاکید است آن است که روابط (۲-۳) تا (۲-۶) مختص حالتی است که نیروی برآیند وارد به ذره ثابت است. یک اشتباه رایج که به دلیل کثرت استفاده از این روابط رخ می‌دهد آن است که گاهی یک نیروی متغیر را در روابط فوق قرار دهیم، که خواننده را به شدت از آن پرهیز می‌دهیم.

همچنین لازم به ذکر است که با انتخاب مناسب دستگاه مختصات و مبدأ آن و همچنین مبدأ اندازه‌گیری زمان (لحظه $t=0$) می‌توان تعداد معادلات و بهتر تعداد ثابتها را تا حد ممکن کم کرد. مثلاً در مسئله سطح شیبدار معمولی با انتخاب محور x در امتداد سطح شیبدار و محور y عمود بر آن فقط کافی است معادلات (۲-۲) و (۲-۴) را در یک بعد (بعد x) بنویسیم. و یا در مثال حرکت پرتابه با انتخاب محور y در امتداد قائم و محل پرتاب به عنوان مبدأ مختصات و لحظه پرتاب به عنوان لحظه شروع حرکت



شکل ۲-۲

به معادلات ساده

$$x = (v_0 \cos\theta)\, t$$
$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\theta)\, t \qquad (۲-۷)$$

می‌رسیم که در آنها فقط ۲ ثابت اولیه $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ و $v_{0y} = v_0 \sin\theta$ وارد شده‌اند.

۲-۴ـ نیروهای تابع زمان ـ

فرض کنید نیروی تابع زمان $\vec{F}(t)$ با مؤلفه‌های دکارتی $F_x(t)$، $F_y(t)$ و $F_z(t)$ بر ذره‌ای به جرم m وارد می‌شود. معادلات حرکت چنین هستند

$$m\frac{dv_x}{dt}=F_x(t)$$
$$m\frac{dv_y}{dt}=F_y(t) \qquad (۸-۲)$$
$$m\frac{dv_z}{dt}=F_z(t)$$

با انتگرال‌گیری از معادلات فوق می‌توان نوشت

$$v_x(t)=\frac{1}{m}\int^{t}F_x(t')\,dt'+V_x$$
$$v_y(t)=\frac{1}{m}\int^{t}F_y(t')\,dt'+V_y \qquad (۹-۲)$$
$$v_z(t)=\frac{1}{m}\int^{t}F_z(t')\,dt'+V_z$$

سمت راست روابط فوق انتگرال نامعین تابع‌های $F_x(t)$، $F_y(t)$، $F_z(t)$ را نوشته‌ایم. منظور، توابعی است که مشتق آنها $F_x(t)$، $F_y(t)$، $F_z(t)$ شود. دقت کنید که در هر یک از انتگرالده‌ها متغیر انتگرال‌گیری را t' نامیده‌ایم تا با متغیر سر انتگرال یکسان نباشد. کمیتهای V_x، V_y و V_z ثابتهای انتگرال‌گیری هستند که لزوماً مؤلفه‌های سرعت اولیه ذره نیستند، اما با قرار دادن $t=0$ در روابط (۲-۹) می‌توان آنها را برحسب مؤلفه‌های $\vec{v}_0$ به دست آورد. این امکان نیز وجود دارد که روابط (۲-۹) را به شکل انتگرال‌های معین نوشت. برای این کار از دو طرف رابطه دیفرانسیلی مثلاً $dv_x=\frac{1}{m}F_x(t)\,dt$ بین دو حد معین انتگرال می‌گیریم. مثلاً اگر در لحظه t_0 سرعت مؤلفه x

زمان v_{0x} و در لحظه t، $v_x(t)$ باشد داریم

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} dv'_x = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\,dt'$$

که نتیجه می‌دهد

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\,dt' \qquad (۱۰-۳)$$

دو رابطه مشابه دیگر نیز برای مؤلفه‌های y و z داریم. دقت کنید که در رابطه (۳-۱۰) دیگر لزومی به افزودن ثابت انتگرال‌گیری نیست. در واقع وقتی از رابطه مشابه انتگرال معین می‌گیریم به طور خودکار شرایط اولیه مربوطه را در مسئله اعمال کرده‌ایم.

فرض کنید $v_x(t)$، $v_y(t)$ و $v_z(t)$ به طور کامل تعیین شده‌اند. با یک بار دیگر انتگرال گیری از روابط $\frac{dx}{dt} = v_x(t)$، $\frac{dy}{dt} = v_y(t)$ و $\frac{dz}{dt} = v_z(t)$ داریم

$$\begin{aligned} x(t) &= \int^{t} v_x(t')\,dt' + X \\ y(t) &= \int^{t} v_y(t')\,dt' + Y \\ z(t) &= \int^{t} v_z(t')\,dt' + Z \end{aligned} \qquad (۱۱-۳)$$

در اینجا نیز ثابتهای انتگرال‌گیری X، Y و Z را از اعمال شرایط اولیه می‌توان به دست آورد. همچنین اگر از انتگرال‌های معین استفاده کنیم روابطی شبیه

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt' \qquad (۱۲-۳)$$

به دست می‌آید که در آن $x_0 = x(t_0)$ شرط اولیه اعمال شده در مسئله است.

مثال - الکترونی با بار e- تحت تاثیر میدان الکتریکی متغیر $\vec{E}=E_0\sin\omega t\,\hat{e}_x$ قرار دارد و در لحظه $t=0$ در مبدأ مختصات ساکن است. حل معادله حرکت دستگاه را به دست آورید.

معادله حرکت فقط در امتداد x اهمیت دارد، داریم

$$m\frac{dv_x}{dt}\hat{e}_x=-e\vec{E}=-eE_0\sin\omega t\ \hat{e}_x$$

$$\frac{dv_x}{dt}=-\frac{eE_0}{m}\sin\omega t$$

با انتگرال گیری نامعین از این معادله داریم

$$v_x(t)=\frac{eE_0}{m\omega}\cos\omega t+V_x$$

در لحظه $t=0$ ذره ساکن است و داریم

$$0=\frac{eE_0}{m\omega}+V_x\quad\Rightarrow\quad V_x=-\frac{eE_0}{m\omega}$$

$$v_x(t)=\frac{eE_0}{m\omega}(\cos\omega t-1)$$

با انتگرال گیری مجدد به دست می آید

$$x(t)=\frac{eE_0}{m\omega^2}\sin\omega t-\frac{eE_0}{m\omega}t+X$$

با اعمال شرط اولیه $x(0)=0$ نتیجه می شود

$$x(t)=\frac{eE_0}{m\omega^2}\sin\omega t-\frac{eE_0}{m\omega}t$$

روش فوق برای نیروی وابسته به زمان قابل تعمیم به یک مسئله نوعی برای مختصات تعمیم یافته است که در آن شتاب یک مختصه تابع معینی از زمان است. مثلاً فرض کنید $\theta(t)$ مختصه تعمیم یافته ذره‌ای باشد

که روی یک دایره در حال حرکت است. اگر از معادلات حرکت به دست آید

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha(t) \qquad (۴-۱۴)$$

که در آن $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$ سرعت زاویه‌ای متغیر دستگاه است با انتگرال‌گیری داریم

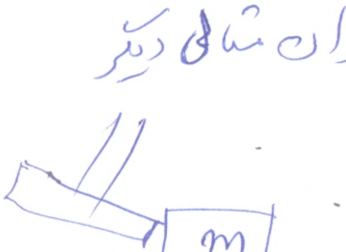
$$\omega(t) = \int^{t} \alpha(t')\,dt' + \Omega$$

$$\theta(t) = \int^{t} \omega(t')\,dt' + \Theta \qquad (۴-۱۵)$$

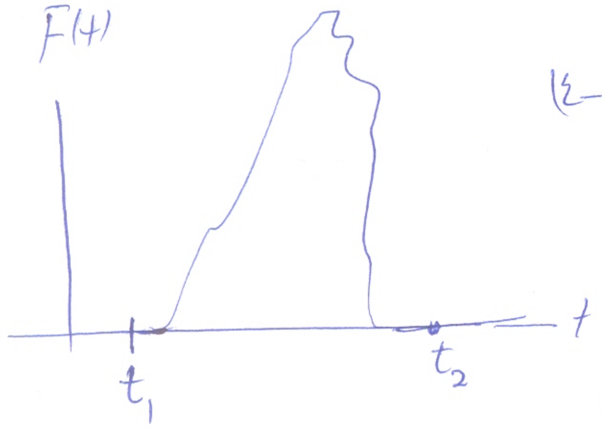
که Ω و Θ ثابتهای انتگرال‌گیری هستند که از شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

۴-۴ نیروهای ضربه‌ای و تکانه

یک دسته از نیروهای وابسته به زمان، نیروهایی هستند که در مدت بسیار کوتاهی بر جسم اثر می‌گذارند اما بزرگی آنها در این مدت کوتاه قابل توجه است. به عنوان مثال توپی را در نظر بگیرید که از ارتفاع معینی روی سطح زمین صاف سقوط می‌کند و پس از برخورد با زمین به بالا برمی‌گردد. در اینجا نیروی عمودی سطح زمین تا قبل از برخورد صفر است و بعد از جدا شدن توپ از سطح زمین نیز صفر است. مدت زمان برخورد نیز معمولاً در مقایسه با جنبش‌های دیگر حرکت بسیار کوتاه است. به عنوان مثالی دیگر جسمی ساکن روی سطح افقی در نظر بگیرید که با ضربه یک چکش به حرکت در می‌آید. مدت زمان تماس چکش با جسم بسیار کوتاه است، اما پس از جدا شدن، جسم سرعت قابل توجه v را به دست آورده است. در طی زمان برخورد تابعیت نیروی چکش از زمان ممکن است بسیار پیچیده باشد که به خواص کشسانی جسم و چکش



شکل (۴-۲)



شکل (۲-۴)

و نحوهٔ زدن ضربه بستگی داشته باشد. شکل (۲-۴) یک نمونه نوعی از چنین نیرویی را نشان می دهد. اگر یک بار دیگر به انتگرال گیری از معادله حرکت نیوتن برای مؤلفه x نیرو توجه کنیم، داریم

$$m\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt \qquad (۲\text{-}۱۵)$$

در اینجا فرض کرده‌ایم که سرعت جسم قبل از اعمال ضربه، یعنی لحظهٔ t_1، برابر v_1 و بعد از اعمال ضربه، یعنی لحظهٔ t_2، برابر v_2 است. اگر اطلاع دقیقی از تابع $F(t)$ داشته باشیم می توانیم با انتگرال گیری در رابطه (۲-۱۵) تابع $v(t)$ را در هر لحظه به دست آوریم. اما سؤال اینجاست که چنین اطلاعاتی به چه درد ما می خورد. معمولاً علاقه‌مند هستیم که حرکت جسم را در طی مدت زمان متناهی بررسی کنیم و اطلاع دقیق از نحوهٔ تغییرات سرعت جسم در طی مدت ضربه برای ما اهمیت فیزیکی ندارد. به این ترتیب در انتگرال گیری از رابطه (۲-۱۵) آنچه اهمیت دارد نتیجه انتگرال بین دو لحظه t_1 و t_2 است که یکی قبل از برخورد و دیگری بعد از برخورد است. اگر سرعت قبل و بعد از برخورد به ترتیب v_1 و v_2 باشد داریم

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt \qquad (۲\text{-}۱۶)$$

نیروهایی که رفتار آنها مشابه به شکل (۲-۴) است، یعنی در بازهٔ کوچکی از زمان مقدارشان غیرصفر و بسیار بزرگ است را نیروهای ضربه‌ای می نامیم

کمیت سمت راست رابطه (۲-۱۶) ضربهٔ نیرو نام دارد که جنبش فیزیکی آن $[FT] = MLT^{-1}$ است. این کمیت، تنها چیزی است که دانستن آن ارزش فیزیکی دارد. به عبارت دیگر به جای دانستن جزئیات بستگی زمانی نیرو به زمان، تنها کمیتی که اهمیت دارد انتگرال زمانی نیرو در مدت ضربه است.

اما عبارت سمت راست نیز معرف کمیت مهمی است. به کمیت $P = mv$ تکانه یا اندازه حرکت می گوییم. رابطه (۲-۱۶) را به صورت

$$P_2 - P_1 = I \qquad (۲-۱۷)$$

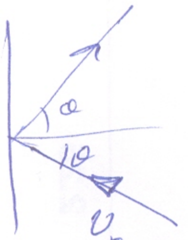
نیز می توانیم بنویسیم که I ضربهٔ نیرو است. این رابطه نشان می دهد که بر اثر یک ضربه معین I، جسمی به جرم m چقدر تغییر سرعت می دهد. به بیان دیگر هرچه ضربه شدیدتر باشد جسم تغییر سرعت بیشتری می دهد، یعنی دستگاه حرکت بیشتری پیدا می کند. همچنین اگر ضربهٔ معینی را به دو جسم مختلف به جرم های m_1 و m_2 وارد کنیم آنکه جرمش بیشتر است کمتر تغییر سرعت می دهد و آنکه جرمش کمتر است بیشتر تغییر سرعت می دهد، در حالی که در هر دو حال مقدار یکسانی حرکت به دستگاه داده شده است. بنابراین می توانیم بگوییم مقدار حرکت یک دستگاه به حاصل ضرب جرم در سرعت بستگی دارد. جسم ساکن هیچ حرکتی ندارد و اندازه حرکت آن صفر است. جسمی که جرم آن m و سرعت آن v است به میزان $P = mv$ حرکت در خود دارد، با یک سرعت معین جسم

سنگین‌تر حرکت بیشتری در خود دارد. این مفهوم بعداً با مطالعه قوانین پایستگی معنای روشن‌تری خواهد یافت.

روابط این بخش را به صورت برداری نیز می‌توان بیان کرد:

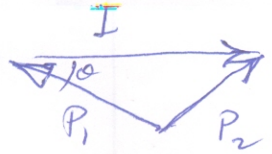
$$\vec{P}_2-\vec{P}_1=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(t)\,dt \qquad (۲-۱۸)$$

هر یک از مؤلفه‌های رابطه (۲-۱۸) رابطه‌ای مشابه به (۲-۱۶) است.



شکل ۲-۵

مثال - جسمی به جرم m با سرعت $\vec{v}$ (مطابق شکل (۲-۵)) به دیواری برخورد می‌کند. زاویه امتداد سرعت با عمود بر سطح دیوار θ است. پس از برخورد جسم با همان سرعت و با زاویه θ نسبت به عمود بر دیوار از آن منعکس می‌شود. ضربه نیروی دیوار را حساب کنید.



شکل (۲-۶)

مطابق شکل (۲-۶) ضربه نیروی دیوار برابر تفاضل برداری $\vec{P}_2$ و $\vec{P}_1$ است. با توجه به شکل داریم

$$\vec{I}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=(2mv\cos\theta)\,\hat{n}$$

که $\hat{n}$ برداری که عمود بر سطح دیوار است.

یک صفحه در این محل اضافه شده ۱۱۱-۱

۲-۵- نیروهای وابسته به سرعت

برای سهولت ابتدا مسئله‌ای یک بعدی در نظر می‌گیریم. قانون دوم نیوتن برای نیرویی که به سرعت جسم بستگی دارد به صورت زیر است

$$m\frac{dv}{dt}=F(v) \qquad (۲-۱۹)$$

این معادله را می‌توان به شکل دیفرانسیلی $\frac{dv}{F(v)}=\frac{1}{m}dt$ درآورد و از آن

* با استفاده از مفهوم تکانه می توان قانون دوم نیوتن را به صورت زیر نیز بیان کرد

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (۲-۱۸-۱)$$

در حقیقت چون $\frac{dP}{dt}=\frac{d}{dt}(mv)$ و m ثابت است داریم $\frac{dP}{dt}=m\frac{dv}{dt}$. در رابطه (۲-۱۸-۱) $\vec{F}$ نیروی برآیند وارد به ذره است. اگر $\vec{F}=0$ در این صورت $\frac{dP}{dt}=0$ که نتیجه آن ثابت بودن تکانهٔ ذره در طول زمان است. به بیان خلاصه

$$\vec{F}=0 \Leftrightarrow \vec{P}=\text{ثابت} \qquad (۲-۱۸-۲)$$

از این رابطه می توان نتیجه گرفت که اگر نیروی وارد به ذره صفر باشد تکانهٔ آن در طول زمان ثابت و یا "پایسته" است. مبدأ درمورد قوانین پایستگی بیشتر خواهیم گفت. رابطه (۲-۱۸-۱) را برای مؤلفه‌های نیرو و تکانه نیز می توان نوشت. مثلاً

$$F_x=\frac{dP_x}{dt} \qquad (۲-۱۸-۳)$$

و به همین ترتیب برای دو مؤلفه دیگر. حال اگر یکی از مؤلفه‌های نیروی برآیند وارد به ذره، مثلاً مؤلفه x آن صفر باشد آنگاه P_x پایسته است. یعنی ممکن است رابطه پایستگی (۲-۱۸-۲) فقط برای یکی از مؤلفه‌ها برقرار باشد در این صورت

$$F_x=0 \Leftrightarrow P_x=\text{ثابت} \qquad (۲-۱۸-۴)$$

مثلاً برای پرتابه‌ای که تحت شتاب ثقل قرار دارد، مؤلفه F_x نیرو صفر است و تکانه افقی جسم همواره ثابت و برابر مقدار اولیه آن یعنی mv_{0x} است.

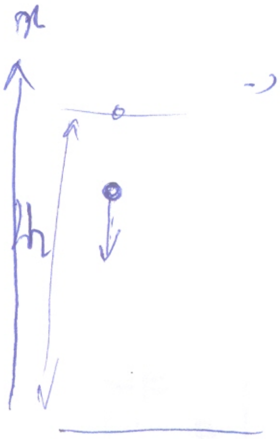
انتگرال گرفت. انتگرال نامعین این مسئله را می‌شود به صورت زیر بیان کرد

$$\int^{v}\frac{dv'}{F(v')}=\frac{1}{m}\int^{t}dt'+\underbrace{C}_{\text{ثابت انتگرال‌گیری}} \qquad (۳-۲۰)$$

که C از شرایط اولیه به دست می‌آید. اگر در لحظه t_0 سرعت v_0 باشد به جای ~~انتگرال~~ رابطه فوق می‌توان از انتگرال معین زیر استفاده کرد.

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{F(v')}=\frac{1}{m}(t-t_0) \qquad (۳-۲۱)$$

از رابطه اخیر می‌توان با محاسبه جبر v را به عنوان تابعی از t به دست آورد و مجدداً با انتگرال‌گیری (مشابه بخش (۳-۲)) از آن $x(t)$ را به دست آورد.



شکل ۳-۲

مثال - گلوله‌ای از ارتفاع h و از حال سکون تحت اثر نیروی گرانش سقوط می‌کند. این گلوله علاوه بر نیروی وزن تحت اثر نیروی مقاومت هوا نیز قرار دارد که در حد سرعتهای کم می‌توان آن را خطی گرفت. حل معادله حرکت را به دست آورید.

شکل برداری نیروی مقاومت هوای خطی را می‌توانیم به صورت $\vec{F}=-b\vec{v}$ بگیریم. علامت منفی به معنی آن است که نیروی برداری خلاف جهت سرعت لحظه‌ای ذره است. ثابت b به شکل جسم (سطح مقطع آن) چگالی هوا و سایر عوامل فیزیکی بستگی دارد که در اینجا قصد بحث آن را نداریم. بعد فیزیکی b، نیرو تقسیم بر سرعت است که MT^{-1} می‌شود. در یک بعد نیز نیروی مقاومت هوا را با رابطهٔ جبری $-bv$ می‌توان بیان کرد. برای v مثبت نیرو منفی و برای v منفی نیرو مثبت می‌شود. بنابراین قانون دوم نیوتن را برای این مسئله به صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-bv$$

در اینجا جهت مثبت محور x را مطابق شکل (۲-۷) رو به بالا گرفته‌ایم. با استفاده از روش ذکر شده در رابطه (۲-۲۰) داریم

$$\int_0^v \frac{dv'}{g+\frac{b}{m}v'} = -\cancel{\frac{b}{m}}\int_0^t dt$$

که نتیجه می‌دهد

$$\ln\left(\frac{g+\frac{b}{m}v}{g}\right) = -\frac{bt}{m}$$

با برابر قرار دادن اکسپوننسیل دو طرف داریم

$$v(t)=\frac{mg}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t}-1\right) \qquad (۲-۲۲)$$

با انتگرال گیری از این رابطه داریم

$$x(t) = -\frac{m^2g}{b^2}e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}t + X$$

در لحظه $t=0$ داریم $x(0)=h$ از اینجا $X=\frac{m^2g}{b^2}+h$. بنابراین

$$x(t)=\frac{m^2g}{b^2}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)-\frac{mg}{b}t+h \qquad (۲-۲۳)$$

پس از گذشت زمان بسیار زیاد، یعنی $t\to\infty$، داریم $e^{-b/m\,t}\to 0$. در نتیجه سرعت به مقدار حدی $v_\infty = -\frac{mg}{b}$ میل خواهد کرد.

دقت در ابعاد کمیتها نیز درخور توجه است. کمیت $\frac{b}{m}t$ بدون بعد است، کمیت $\frac{mg}{b}$ که در رابطه سرعت آمده بعد سرعت دارد و کمیت $\frac{m^2g}{b^2}$ نیز بعد طول دارد.

همچنین در زمانهای کوچک $\frac{b}{m}t \ll 1$ و می‌توان بسط تابع نمایی را در رابطه (۲-۲۲) تا اولین رتبه $\frac{bt}{m}$ در نظر گرفت، در نتیجه

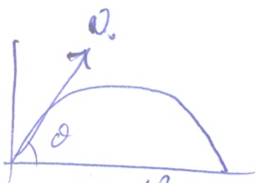
$$v(t) \simeq \frac{mg}{b}\left[\left(1-\frac{bt}{m}+\dots\right)-1\right] \simeq -gt \qquad (۲-۲۴)$$

اما در عبارت (۲-۲۳) برای x به دلیل فاکتور بزرگ $\frac{m^2g}{b^2}$ باید تا رتبه دوم بسط تابع نمایی را پیش برد. نتیجه چنین است

$$x(t)=\frac{m^2g}{b^2}\left[1-\left(1-\frac{bt}{m}+\frac{1}{2}\frac{b^2t^2}{m^2}+\dots\right)\right]-\frac{mg}{b}t+h$$

$$\simeq -\frac{1}{2}gt^2+h \qquad (۳-۲۵)$$

برای نیروهای وابسته به سرعت در دو یا سه بعد حل مسئله ممکن است اندکی مشکل‌تر از انتگرال‌گیری ساده انجام شده در رابطه (۳-۲۱) باشد. مشکل اصلی ناشی از آن است که معادلات دیفرانسیل مربوط به مؤلفه‌های مختلف سرعت باهم آمیخته و باصطلاح جفت شده باشند. ترجیح می‌دهیم این نکته را در ذیل مثال‌هایی که در پی می‌آید نشان دهیم. نخست مثالی را در نظر می‌گیریم که معادلات جفت نشده‌اند و سپس مثالی با معادلات جفت شده و روش حل آنها را مطرح خواهیم کرد.



(شکل ۳-۸)

مثال - حرکت پرتابه را در حضور مقاومت هوای خطی بررسی کنید.

فرض می‌کنیم پرتابه از مبدأ مختصات با سرعت اولیه طبق معمول

$$\vec{v}_0=v_0\cos\theta\,\hat{e}_x+v_0\sin\theta\,\hat{e}_y \qquad (۳-۲۶)$$

پرتاب می‌شود. در حضور نیروی وزن $-mg\hat{e}_y$ و نیروی مقاومت هوای $-b\vec{v}$ نیروی برایند وارد به ذره چنین است

$$\vec{F}=-bv_x\hat{e}_x-bv_y\hat{e}_y-mg\hat{e}_y \qquad (۳-۲۷)$$

بنابراین معادلات حرکت نیوتن چنین است

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt}=-bv_x \\[2mm] m\dfrac{dv_y}{dt}=-bv_y-mg \end{cases} \qquad (۳-۲۸)$$

در اینجا دو معادله مستقل از هم داریم که هرکدام شامل یکی از مؤلفه‌های سرعت و مشتق زمانی همان مؤلفه است، که می‌توانیم هریک را با روشی که گفته شد در رابطه (۳-۲۱) مستقل از دیگری حل کرده. در این حالت معادلات جفتیده نیستند و حل آنها به یکدیگر گره نخورده است. با توجه به شرایط اولیه (۳-۲۶) از رابطه

(۳-۲۸) که به شکل انتگرال معین است داریم

$$\int_{v_0\cos\theta}^{v_x}\frac{dv'_x}{v'_x}=-\frac{b}{m}\int_0^t dt' \quad\Rightarrow\quad v_x=(v_0\cos\theta)\,e^{-\frac{b}{m}t}$$

$$\int_{v_0\sin\theta}^{v_y}\frac{dv'_y}{v'_y+\frac{mg}{b}}=-\frac{b}{m}\int_0^{t'} dt' \qquad v_y=\left(v_0\sin\theta+\frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t}-\frac{mg}{b}$$

(۳-۲۹)

از روابط به دست آمده می‌توان مجدداً انتگرال گرفت و $x(t)$ و $y(t)$ را به دست آورد:

$$x(t)=-\frac{mv_0}{b}(\cos\theta)\,e^{-\frac{b}{m}t}+X$$

$$y(t)=-\frac{m}{b}\left(v_0\sin\theta+\frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t}-\frac{mg}{b}t+Y$$

با توجه به اینکه در لحظه $t=0$ ، $x(0)=0$ و $y(0)=0$ ، X و Y را می‌توان تعیین کرد و در روابط فوق قرار داد. نتیجه نهایی چنین است

$$x(t)=\frac{mv_0\cos\theta}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

$$y(t)=\frac{m}{b}\left(v_0\sin\theta+\frac{mg}{b}\right)\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)-\frac{mg}{b}t$$

(۳-۳۰)

حل تحلیلی و دقیق مسئله در اینجا تمام می‌شود. اما در بسیاری موارد دوست داریم نتایج کمی و مشخص از فرمول‌های پیچیده‌ای مثل روابط (۳-۳۰) به دست آوریم که تفاوت آنچه به دست آمده را با پرتابه معمولی بهتر بفهمیم. به عنوان مثال اگر b کوچک باشد نیروی مقاومت هوا از وزن جسم خیلی کوچکتر است و داریم $bv_0 \ll mg$. بازه زمانی حرکت پرتابه از مرتبه $\frac{v_0}{g}$ است بنابراین در طی پرواز $\frac{bt}{m}\ll 1$. ~~اگر در روابط بدست آمده $e^{-\frac{b}{m}t}$ را تا جمله مرتبه اول (۳-۲۹) (۳-۳۰)~~ ~~بسط به $\frac{bt}{m}$ ... مثلاً ... در~~ بنابراین می‌توانیم توابع نهایی را تقریب بزنیم و بسط آنها را تا مرتبه‌ای که منجر به نتایج جدید

(نسبت به حالتی که مقاومت هوا وجود ندارد) می شود، به کار ببریم. به این ترتیب روابط (۳۹-۳) و (۴۰-۳) به صورت زیر در می آیند

$$v_x = v_0 \cos\theta \left(1 - \frac{b}{m}t + \cdots\right)$$
$$v_y = \left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right)\left(1 - \frac{b}{m}t + \frac{1}{2}\frac{b^2}{m^2}t^2 + \cdots\right) \qquad (۴۱-۳)$$

$$x = \frac{m v_0 \cos\theta}{b}\left[1 - \left(1 - \frac{b}{m}t + \frac{1}{2}\frac{b^2}{m^2}t^2 + \cdots\right)\right]$$

$$y = \frac{m}{b}\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{b}{m}t + \frac{1}{2}\frac{b^2}{m^2}t^2 - \frac{1}{6}\frac{b^3}{m^3}t^3 + \cdots\right)\right] - \frac{mg}{b}t$$

در روابط فوق با توجه به وجود فراییـ بیرون بسط ها در هر مورد بسط را تا آنجا ادامه داده ایم که نهایتاً بتوانیم تصحیح مرتبهٔ اول عبارت ها نسبت به $\frac{bt}{m}$ را به دست آوریم. پس از محاسبات تا مرتبهٔ اول $\frac{bt}{m}$ داریم

$$v_x \simeq v_0 \cos\theta - \frac{b}{m} v_0 (\cos\theta) t$$
$$v_y \simeq -gt + v_0 (\sin\theta) + \frac{bt}{m}\left[-v_0 \sin\theta + \frac{1}{2}gt\right], \qquad (۴۲-۳)$$
$$x \simeq v_0 (\cos\theta) t - \frac{bt}{2m}\left(v_0 (\cos\theta) t\right)$$
$$y \simeq -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 (\sin\theta) t + \frac{bt}{2m}\left[-v_0 (\sin\theta) t + \frac{1}{3}gt^2\right]$$

فرض کنید می خواهیم زمان رسیدن به نقطهٔ اوج را با در نظر گرفتن اثر مقاومت هوا تا اولین مرتبه به دست آوریم. این کار با قرار دادن $v_y = 0$ به دست می آید. اگر این زمان را T_1 بنامیم داریم

$$T_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g + \frac{b}{m}\left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gT_1\right)}$$

در عبارتی که در مخرج کسر قرار گرفته T_1 را داریم. اما چون کمیت داخل پرانتز در $\frac{b}{m}$ ضرب شده کافی است مقدار T_1 را همان عبارت مرتبهٔ صفرم یعنی $T_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$ قرار دهیم. در نتیجه داریم

$$T_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g + \frac{b}{m}\left(\frac{1}{2}v_0 \sin\theta\right)} \simeq \frac{v_0 \sin\theta}{g}\left(1 - \frac{b}{2m}\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) = T_1^{(0)}\left(1 - \frac{b}{2m}T_1^{(0)}\right)$$

(۴۳-۳)

بنابراین زمان رسیدن به اوج به اندازهٔ $\Delta T_1 = -\frac{b}{2m}\left(T_1^{(0)}\right)^2$ کاسته می‌شود.

حال ببینیم زمان کل پرواز که در رتبهٔ صفرم (بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا) $T_2^{(0)} = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$ است تا تقریب مرتبهٔ اول (برحسب b) چقدر تغییر می‌کند. این کار با قرار دادن $y=0$ به دست می‌آید. نتیجه چنین است

$$T_2 = \frac{2v_0\sin\theta}{g + \frac{b}{2m}\left[v_0\sin\theta - \frac{1}{3}gT_2\right]}$$

در اینجا نیز کروشهٔ موجود در مخرج کسر در ضریب $\frac{b}{2m}$ ضرب شده و کافی است مقدار آن را برای $T_2^{(0)}$ حساب کنیم که حاصل آن $\frac{2}{3}v_0\sin\theta$ است. در نتیجه داریم

$$T_2 \simeq \frac{2v_0\sin\theta}{g + \frac{1}{3}\frac{b}{m}v_0\sin\theta}$$

$$\simeq \frac{2v_0\sin\theta}{g}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{b}{m}\frac{v_0\sin\theta}{g}\right)$$

$$= T_2^{(0)}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{b}{m}T_2^{(0)}\right) \qquad (۳-۲۴)$$

به این ترتیب زمان پرواز به اندازهٔ $\Delta T_2 = -\frac{b}{6m}\left[T_2^{(0)}\right]^2$ کاسته می‌شود.

درس جالبی که می‌گیریم آن است که ΔT_2 دو برابر ΔT_1 نیست. یعنی با در نظر مقاومت هوا دیگر زمان پرواز دو برابر زمان رسیدن به اوج نیست (و اندکی کمتر است).

سرانجام ببینیم برد پرتابه با وجود مقاومت هوا چگونه تغییر می‌کند: برای محاسبهٔ برد طبق معمول باید زمان پرواز (۳-۲۴) را در رابطهٔ $x(t)$ قرار دهیم.

به این ترتیب ~~[illegible]~~ از رابطه (۳-۳۲) داریم

$$R = x(T_2) \cancel{\quad}$$

$$= v_0(\cos\theta)\, T_2 \left(1 - \frac{b T_2}{2m}\right)$$

$$\simeq v_0(\cos\theta)\, T_2^{(0)} \left(1 - \frac{b}{3m}\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)\left(1 - \frac{b}{2m} T_2^{(0)}\right)$$

$$= R_0 \left(1 - \frac{b}{3m}\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)\left(1 - \frac{b}{m}\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)$$

$$\simeq R_0 \left(1 - \frac{4}{3}\frac{b v_0 \sin\theta}{g}\right) \qquad (۳-۴۵)$$

که در آن $R_0 = v_0(\cos\theta) T_2^{(0)}$ برد حرکت پرتابی بدون مقاومت هواست.
در سطر سوم محاسبه فوق T_2 را در پرانتز دوم، $T_2^{(0)}$ قرار داده ایم، چون
در کمیت کوچک $\frac{b}{m}$ ضرب شده است.

مثال - ذره‌ای با بار الکتریکی q در میدان مغناطیسی در لحظه $t=0$ در مبدأ مختصات
با سرعت اولیه $\vec{v} = v_0\hat{e}_x + v\hat{e}_y$ وارد میدان مغناطیسی $\vec{B} = B\hat{e}_y$ می‌شود.
معادله حرکت ذره را حل کنید.

نیروی وارد به ذره نیروی لورنتز است که در دستگاه واحدهای SI
با رابطه $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$ داده می‌شود. با توجه به رابطه ضرب خارجی
(رابطهٔ ....) داریم

$$\vec{F} = -qBv_z\,\hat{e}_x + qBv_x\,\hat{e}_z \qquad (۳-۴۶)$$

معادلات حرکت نیوتن به صورت زیر است

$$m\frac{dv_x}{dt} = -qBv_z$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = 0 \qquad (۳-۴۷)$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = qBv_x$$

معادله دوم با توجه به سرعت اولیه ذره به راحتی حل می‌شود و حاصل آن $y = Vt$ است. یعنی در امتداد y (راستای میدان مغناطیسی B) ذره با سرعت ثابت V حرکت می‌کند. اما دو معادله دیگر جفت‌شده هستند. یعنی در معادله حرکت v_x، مؤلفه v_z و در معادله حرکت v_z، مؤلفه v_x حضور دارد. بنابراین نمی‌توان دو معادله یادشده را مستقل از هم حل کرد.

با نامگذاری $\frac{qB}{m} = \omega_0$ داریم

$$\dot{v}_x = -\omega_0 v_z$$
$$\dot{v}_z = \omega_0 v_x \qquad (۲-۳۸)$$

معادلات جفت‌شده (۲-۳۸) به دفعات در سیستم‌های مکانیکی رخ می‌دهند و روش حل آسانی دارند. با مشتق‌گیری مجدد از رابطه اول (یا دوم) داریم

$$\ddot{v}_x = -\omega_0 \dot{v}_z = -\omega_0^2 v_x \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega_0^2 v_x = 0 \qquad (۲-۳۹)$$

این معادله، معادله آشنای نوسانگر هماهنگ است. توابعی که مشتق دوم آنها با ضریب منفی با خودشان متناسب است سینوس یا کسینوس هستند. به بیان صریح‌تر $\sin \omega_0 t$ و $\cos \omega_0 t$ حل‌های معادله (۲-۳۹) هستند. چون این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی است هر ترکیب خطی از حل‌های خاص معادله، یک حل آن خواهد بود. بنابراین کلی‌ترین حل معادله (۲-۳۹) که شامل دو ثابت اختیاری باشد چنین است:

$$v_x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \qquad (۲-۴۰)$$

از رابطه نخست (۲-۳۸) داریم

$$v_z(t) = -\frac{1}{\omega_0} \dot{v}_x = -A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \qquad (۲-۴۱)$$

دقت کنید که v_z نیز از معادله دیفرانسیلی مشابه به (۲-۳۹) تبعیت می‌کند اما در واقع دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ و با v_z، ثابت اختیاری نداریم

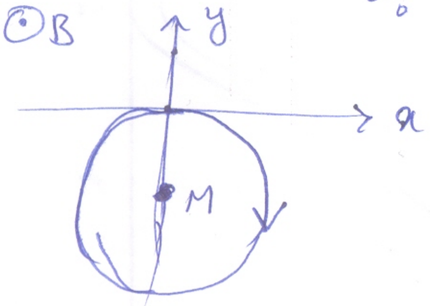
بلکه دو معادله دیفرانسیل مرتبه یک (البته جفت‌شده) داریم که حل آنها بیش از دو ثابت اختیاری ندارد. با توجه به سرعت اولیه در لحظه $t=0$ داریم

$v_0=B$ و $A=0$. در نتیجه

$$v_x = v_0 \cos\omega_0 t$$
$$v_z = v_0 \sin\omega_0 t \qquad (۴۲-۳)$$

با انتگرال‌گیری مجدد و اعمال شرط اولیه $\vec{r}_0 = 0$ به دست می‌آید

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t \qquad (۴۳-۳)$$
$$z(t) = \frac{v_0}{\omega_0} (1-\cos\omega_0 t)$$



شکل (۳-۹)

مسیر حرکت در صفحه $x-z$ دایره‌ای به شعاع $\frac{v_0}{\omega_0}$ و به مرکز M به مختصات $(0, -\frac{v_0}{\omega_0}, 0)$ است که مطابق شکل (۳-۹) ذره ساعتگرد روی آن می‌چرخد. در عین حال ذره در جهت عمود بر صفحه، یعنی در جهت y، با سرعت ثابت V منتقل می‌شود. ترکیب این دو حرکت مارپیچی است که در هر دور چرخیدن به اندازه $V\frac{2\pi}{\omega_0}$ ذره در امتداد میدان مغناطیسی جلو می‌رود.

۳ - ۵ - نیروهای وابسته به مکان

بحث نیروهای وابسته به مکان را از مسئله یک بعدی آغاز می‌کنیم. خواهیم دید که مسئله در سه بعد ماهیتی کاملاً متفاوت با یک بعد دارد. فرض کنید ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی وابسته به مکان زیر قرار گرفته است

$$\vec{F} = F(x)\,\hat{e}_x \qquad (۴۴-۳)$$