از شکل (۲-۱۵) منحنی انرژی پتانسیل اصلی (خط پر) را می‌توان با
یک منحنی انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ (سهمی خط چین) تقریب
زد. در نقطه x_0 دو منحنی همدیگر را تلاقی کرده‌اند، پس مقدار V در
آنها یکی است و بر هم مماسند، پس مشتق اول آنها نیز یکسان و صفر است و
و بالاخره تقعر آنها نیز یکسان است بنابراین اندازه k سهمی نوسانگر
هماهنگ فرضی یا $\frac{d^2V}{dx^2}$ در آن نقطه یکسان است. روشن است که
اگر از نقطه x_0 بیشتر فاصله بگیریم توانهای بالاتر $(x-x_0)$ در بسط تیلور
(۲-۷۷) اهمیت می‌یابند و منحنی $V(x)$ از منحنی خط چین نوسانگر هماهنگ
فاصله می‌گیرد. به این ترتیب می‌توان به اهمیت مسئله نوسانگرهای هماهنگ
بیشتر پی برد. در حقیقت هر پتانسیل دلخواهی در نزدیکی نقاط کمینه خود
رفتارش رفتار نوسانگر هماهنگ است. کلیه دستگاههای مکانیکی
با از دست دادن انرژی در نقاط تعادل پایدار خود آرام می‌گیرند و
چنانچه اختلالی بر آنها اثر کند حول و حوش این وضعیت نوسان انجام
می‌دهند. بسامد نوسانهای کوچک حول نقطه تعادل پایدار از رابطه

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x_0}} \qquad (۲-۷۸)$$

به دست می‌آید.

۲-۷- نیروهای وابسته به مکان در سه بعد-

فرض کنیم ذره‌ای به جرم m در فضای سه بعدی تحت تأثیر نیرویی قرار دارد

که هر سه مؤلفه‌ی آن توابعی از نقاط فضا هستند. در مختصات دکارتی چنین نیرویی با رابطه زیر توصیف می‌شود

$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\,\hat{e}_x + F_y(x,y,z)\,\hat{e}_y + F_z(x,y,z)\,\hat{e}_z \qquad (۷۹-۲)$$

به چنین کمیتی در حالت سه بعدی یک میدان برداری گفته می‌شود. در یک میدان برداری به هر نقطه فضا با مختصات دکارتی x، y و z یک بردار نسبت داده می‌شود که معادل با سه تابع F_x، F_y و F_z است. در مقابل، در یک میدان نرده‌ای به هر نقطه x، y و z کمیت نرده‌ای $\varphi(x,y,z)$ نسبت داده می‌شود.

معادله حرکت نیوتن در شکل برداری آن به صورت زیر است:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) \qquad (۸۰-۲)$$

نظیر آنچه در یک بعد انجام دادیم، در اینجا نیز طرفین رابطه (۲-۸۰) را در بردار $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ ضرب داخلی می‌کنیم. حاصل چنین است

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

با ضرب کردن طرفین در dt و انتگرال گیری روی طرفین از نقطه A تا نقطه B داریم

$$\int_{v_A}^{v_B} m\,\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \qquad (۸۱-۲)$$

از آنجا که $\vec{v}\cdot\vec{v}=v^2$ (که v اندازه بردار سرعت است) و $d(\vec{v}\cdot\vec{v})=2\vec{v}\cdot d\vec{v}$، سمت چپ رابطه (۲-۸۱) انتگرالی از $d(\frac{1}{2}mv^2)$ است که کل تغییرات انرژی جنبشی را می‌دهد:

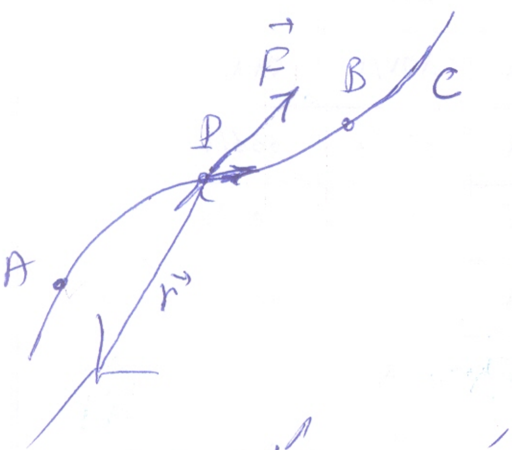
$$\int_{v_A}^{v_B} m\,\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = \Delta K \equiv K_B - K_A$$

و اما سمت راست رابطه (۲-۸۱) در سه بعد شکل پیچیده‌تری از یک بعد دارد. این کمیت کار نیروی $\vec{F}$ در جابه‌جایی ذره نام دارد و به صورت زیر است

$$W_{AB} = \int_A^B \left[F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz\right] \qquad (۲-۸۲)$$

که در آن از ضرب داخلی بردار $\vec{F}$ در رابطه ۲-۷۹ در بردار جابه‌جایی بینهایت کوچک

$$d\vec{r} = dx\,\hat{e}_x + dy\,\hat{e}_y + dz\,\hat{e}_z \qquad (۲-۸۳)$$



شکل (۲-۱۷)

استفاده کرده‌ایم. در یک توصیف هندسی فرض کنید ذره روی خم C (مطابق شکل ۲-۱۷) از نقطه A تا نقطه B حرکت کرده است. در نقطه نامشخص P روی مسیر که با بردار مکان $\vec{r}$ توصیف شده میدان نیرو شکل $\vec{F}(\vec{r})$ را دارد و بردار جابه‌جایی بردار بینهایت کوچک $d\vec{r}$ است که در شکل نشان داده شده است. کمیت $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ کار نیروی F در جابه‌جایی بینهایت کوچک $d\vec{r}$ است، که کمیتی بینهایت کوچک است. این کمیت علاوه بر اندازه $|\vec{F}|$ و اندازه $|d\vec{r}|$ به زاویه دو بردار نیز بستگی دارد. از برهم‌نهی مقادیر دیفرانسیلی dW در حرکت از نقطه A تا نقطه B کمیت $W_{AB}^{(C)}$ به دست می‌آید که کار نیروی F در جابه‌جایی از A تا B روی مسیر C است. به این ترتیب رابطه (۲-۸۱) به قضیه کار-انرژی در سه بعد با بیان زیر منتهی می‌شود

$$K_B - K_A \equiv \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 = \int_{A\ \text{(روی مسیر C)}}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv W_{AB}^{(C)} \qquad (۲-۸۴)$$

از نحوهٔ تعریف کمیت $W_{AB}^{(c)}$ می‌توان دید که در حالت کلی این کمیت عمیقاً به مسیر حرکت یعنی خم C بستگی دارد.

به لحاظ ریاضی خم C در فضای سه بعدی را می‌توان نگاشتی از پارامتر حقیقی s در بازه $[a,b]$ به فضای سه بعدی (x,y,z) به حساب آورد، به طوری که ~~$z(a)=z_A$ و $y(a)=y_A$ ، $x(a)=x_A$~~
~~به همین ترتیب $z(b)=z_B$ و $y(b)=y_B$ ، $x(b)=x_B$~~ .

$$x=x(s),\qquad y=y(s),\qquad z=z(s) \qquad (۸۵-ج)$$

به هر مقدار s یک نقطه منحصر به فرد با مختصات (x,y,z) از رابطه (۸۵-ج) به دست می‌آید. البته ممکن است دو یا چند مقدار s یک نقطه را بدهند. مجموعه نقاطی که به ازای مقادیر مختلف s دنبال هم قرار می‌گیرند خم C در فضای سه بعدی را به ما می‌دهد. نقطه ابتدایی A به ازای $s=a$ و نقطه انتهایی B به ازای $s=b$ به دست می‌آیند. حال انتگرال (۸۲-ج) برای کار نیروی F از A تا B را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$W_{AB}^{(c)}=\int_a^b\Big[F_x\big(x(s),y(s),z(s)\big)\frac{dx}{ds}+F_y\big(x(s),y(s),z(s)\big)\frac{dy}{ds}+F_z\big(x(s),y(s),z(s)\big)\frac{dz}{ds}\Big]ds \qquad (۸۶-ج)$$

این انتگرال شکل یک انتگرال معمولی روی متغیر s را دارد و علی‌الاصول کمیتی قابل محاسبه است. در حالت خاص ممکن است پارامتر مسیر s همان زمان t باشد. رابطه (۸۶-ج) نشان می‌دهد در عمل وقتی می‌توان کار نیرو را حساب کرد که مسیر حرکت ذره را بشناسیم. اما چنین چیزی اغلب زمانی امکان‌پذیر است که ما پیشاپیش مسئله را کاملاً حل کرده باشیم. بنابراین قضیه کار - انرژی

به شکلی که در رابطه (م-۸۴) بیان شده است گزاره‌ای درست است که از قانون دوم نیوتن نتیجه شده. اما در حالت کلی ممکن است برای حل مسئله کمک خاصی نکند. در واقع اگر قرار باشد از قبل اطلاعات کاملی از مسیر حرکت ذره داشته باشیم چیزی برای حل کردن وجود ندارد.

اما مسایلی هست که در آنها محاسبه کار برخی نیروها نسبتاً آسان است و قضیه کار-انرژی به شکلی در می‌آید که می‌تواند برای حل مسئله مفید باشد. مهمترین نوع این قبیل مسایل به "نیروهای پایستار" مربوط می‌شود. برای توضیح نیروهای پایستار اندکی مقدمات ریاضی لازم داریم.

تابع نرده‌ای سه متغیره $f(x,y,z)$ از نقاط فضای سه بعدی را درنظر بگیرید. مشتق جزئی یا مشتق پاره‌ای f نسبت به هریک از متغیرها چنین تعریف می‌شود

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) \; f(x,y,z)}{\Delta x} \qquad (م-۸۷)$$

به همین ترتیب $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ نیز تعریف می‌شود. مشتق جزئی f نسبت به x با همان مشتق‌گیری معمولی به دست می‌آید که در آن y و z مثل پارامترهای ثابت درنظر گرفته شوند. اصطلاحاً می‌گوییم در مشتق‌گیری جزئی نسبت به x متغیرهای y و z تماشاچی هستند. حال ببینیم اگر از نقطه (x,y,z) به نقطه $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ برویم که Δx، Δy و Δz کوچک هستند، تغییرات تابع f چقدر است. داریم:

$$\Delta f \equiv f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)$$

$$+ f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)$$

$$+ f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$$

$$\simeq \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z \qquad (۸۸-۲)$$

در قدم آخر از رابطه (۸۷-۲) درحالتی که طرفین را در Δx کوچک ضرب کرده‌ایم و مشابه آن برای $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ استفاده کرده‌ایم. دقت کنید که چون Δx، Δy و Δz کوچک است مقدار مشتق $\frac{\partial f}{\partial x}$ در نقطه $(x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ تقریباً با نقطه (x,y,z) یکسان است. درحالتی که Δx، Δy و Δz به صفر میل کنند رابطه (۸۸-۲) به شکل دقیق زیر درمی‌آید

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (۸۹-۲)$$

به df دیفرانسیل کامل تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ می‌گوییم. حال می‌توانیم رابطه (۸۹-۲) را به صورت زیر نیز بنویسیم

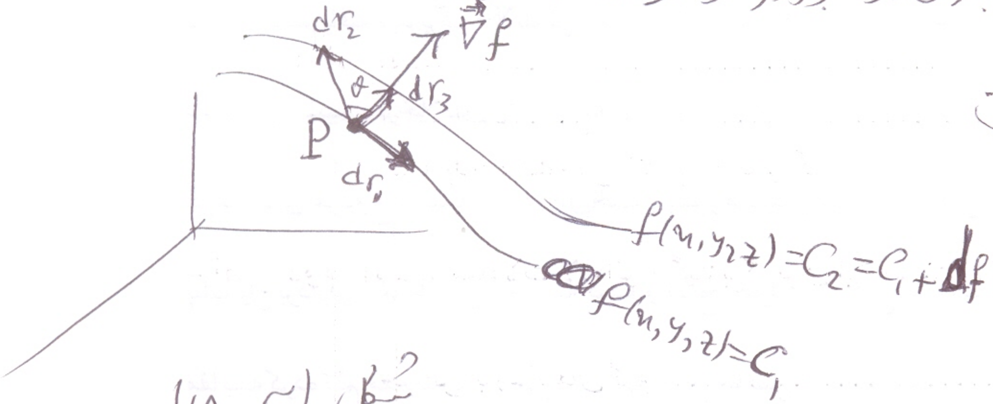
$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \qquad (۹۰-۲)$$

در این رابطه بردار $d\vec{r}$ جابه‌جایی بینهایت کوچک از نقطه (x,y,z) به نقطه $(x+dx, y+dy, z+dz)$ است که با رابطه (۸۲-۲) در مختصات دکارتی داده می‌شود. بردار $\vec{\nabla} f$ نیز گرادیان f نام دارد و در مختصات دکارتی با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \qquad (\text{ب}-۹۱)$$

به سهولت می‌توان دید که ضرب داخلی $\vec{\nabla} f$ از رابطه (ب-۹۱) در $d\vec{r}$ از رابطه (ب-۹۳) دیفرانسیل کامل f در رابطه (ب-۸۹) را می‌دهد.

برای درک هندسی بهتری از بردار گرادیان به شکل (ب-۱۸) توجه کنید.



شکل (ب-۱۸)

در این شکل مجموعه نقاطی از فضا که در آنها مقدار تابع f برابر C_1 است یک رویه به نام رویه $f=C_1$ تشکیل می‌دهند که در شکل مقطع آن را نشان داده‌ایم. به همین ترتیب $f=C_2=C_1+\Delta f$ رویه دیگری را تشکیل داده است که مقدار f در آن اندکی بیشتر است. روشن است که سطوح $f=$ ثابت یکدیگر را قطع نمی‌کنند (چون در این صورت در نقاط تقاطع مقدار f معین نیست).

در شکل فوق جابه‌جایی کوچک $d\vec{r}_1$ بر روی رویه $f=C_1$ صورت گرفته است. بر اثر این جابه‌جایی f تغییری نمی‌کند. بنابراین از رابطه (ب-۹۰) درمی‌یابیم که $\vec{\nabla} f$ بر $d\vec{r}_1$ عمود است. به این ترتیب می‌توان این نتیجه کلی را گرفت که در هر نقطه از فضا بردار $\vec{\nabla} f$ بر سطح $f=$ ثابت که از آن نقطه می‌گذرد عمود است. حال به جابه‌جایی‌های $d\vec{r}_2$ و $d\vec{r}_3$ توجه کنید. تغییر f بین دو رویه نشان داده شده برای هر دو نقطه [illegible]

از دو رویه مقدار معین df است. بنابراین

$\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}_2 = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}_3 = df$. از شکل می‌توان دید که

$$df = |\nabla f||dr_2| = |\nabla f||dr_3|\cos\theta \qquad (۹۲-۲)$$

حال اگر به طور موضعی در نقطه P جا به جایی در امتداد گرادیان (یعنی در امتداد عمود بر سطح $f=$ثابت) بین دو سطح $f=c_1$ و $f=c_2$ را با تغییر طول ds نشان دهیم، خواهیم داشت

$$|\nabla f| = \frac{df}{ds} \qquad (۹۳-۲)$$

از مجموع این گفته‌ها نتیجه می‌گیریم که بردار گرادیان در هر نقطه عمود بر سطوح $f=$ ثابت است و اندازه آن متناسب با آهنگ تغییر f در واحد طول در امتداد عمود بر رویه $f=$ ثابت و جهت آن در جهت افزایش f است.

برای تکمیل این بحث، قبل از بازگشت به موضوع نیروهای پایستار اجازه دهید بردار گرادیان را در مختصات استوانه‌ای و کروی نیز به دست آوریم. فرض کنید تابع سه متغیره $f(\rho,\varphi,z)$ از نقاط فضا در مختصات استوانه‌ای داده شده است. با همان استدلالی که برای مختصات دکارتی به کار بردیم در اینجا نیز دیفرانسیل کامل f را می‌توان چنین بیان کرد

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} dz \qquad (۹۴-۲)$$

حال ~~[illegible]~~ ، df را از رابطه (۲-۹۴) و $d\vec{r}$ را از رابطه ...

برای مختصات استوانه‌ای در رابطه (۲-۹۰) که در حقیقت تعریف

بردار گرادیان است قرار می‌دهیم: ~~[illegible]~~

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\vec{\nabla} f) \cdot (d\rho\, \hat{e}_\rho + \rho\, d\varphi\, \hat{e}_\varphi + dz\, \hat{e}_z)$$

از این رابطه می‌توان دید که $\vec{\nabla} f$ در مختصات استوانه‌ای باید چنین باشد

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \qquad (۲-۹۵)$$

به همین ترتیب برای تابع سه متغیره $f(r,\theta,\varphi)$ در مختصات کروی با استفاده از رابطه (۲-۹۰) می‌توان نوشت

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$= (\vec{\nabla} f) \cdot (dr\, \hat{e}_r + \rho\, d\theta\, \hat{e}_\theta + \rho \sin\theta\, d\varphi\, \hat{e}_\varphi)$$

در نتیجه $\vec{\nabla} f$ در مختصات کروی چنین است

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \qquad (۲-۹۶)$$

به عامل $\vec{\nabla}$ که روی تابع f اثر کرده عملگر گرادیان می‌گوییم که شکل آن در سه نوع مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی چنین است:

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (۲-۹۷)$$

$$= \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

حال برگردیم به بحث فیزیکی خودمان و مسئله محاسبهٔ کار نیروی F در جابه‌جایی از نقطه A تا نقطه B. چنانکه دیدیم برای یک نیروی دلخواه W_{AB} به مسیر بستگی دارد. حال فرض کنیم مؤلفه‌های دکارتی نیروی $\vec{F}$ به گونه‌ای باشد که بتوان نوشت

$$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z \qquad (۲-۹۸)$$

به بیان دیگر تابع نرده‌ای $V(x,y,z)$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که مؤلفه‌های $\vec{F}$ با مشتقات پاره‌ای V نسبت به مختصه مورد نظر (البته با یک علامت منفی) مساوی باشند. در این صورت رابطه (۲-۸۴) برای کار نیروی F به صورت زیر در می‌آید

$$W_{AB} = \int_A^B (-\vec{\nabla} V) \cdot dr = -\int_A^B dV = -(V_B - V_A) \qquad (۲-۹۹)$$

چنانکه دیده می‌شود در این حالت بدون آنکه نیاز به دانستن مسیر حرکت ذره از A تا B باشد نتیجه انتگرال‌گیری فقط به مختصات نقاط ابتدایی و انتهایی بستگی پیدا می‌کند. از این به بعد مسئله شبیه مسئله یک بعدی می‌شود. یعنی از قضیه کار-انرژی در می‌یابیم که $\Delta K = -\Delta V$ و در نتیجه $\Delta(K+V)=0$ یعنی کمیت

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x,y,z) \qquad (۲-۱۰۰)$$

ثابت حرکت است. دقت کنیم که در مسئله یک بعدی برای هر نیروی دلخواه که تابع مکان باشد پتانسیل $V(x)$ را می‌توانیم تعریف کنیم.

اما در سه بعد مؤلفه های نیرو باید به گونه ای باشند که از گرادیان گیری از تابع انرژی پتانسیل به دست آمده باشند. به بیان دیگر برای هر نیروی دلخواه تابع مکان نمی توان انرژی پتانسیل تعریف کرد و قانون پایستگی انرژی (۲-۱۰۰) را به دست آورد. نیرویی که برای آن بتوان پتانسیل تعریف کرد و رابطه (۲-۹۸) برای آن معتبر باشد را نیروی پایستار می نامیم.

V برای نیروی پایستار $\vec{F}$ انرژی پتانسیل به صورت زیر از نیرو به دست می آید

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{F} \cdot dr \quad (۲\text{-}۱۰۰')$$

که در آن r_0 مبدأ پتانسیل است و $V(r_0)=0$

حال با دقت بیشتری ببینیم شرط ریاضی برای آنکه نیروی F پایستار باشد چیست. با استفاده از رابطه (۲-۹۸) برای یک نیروی پایستار می توان نوشت

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \qquad (۲\text{-}۱۰۱)$$

اما چنانچه می دانیم برای توابع تحلیلی (یعنی توابعی که مشتقات آنها نسبت به متغیرها تا هر مرتبه دلخواه پیوسته باشند) ترتیب مشتق گیری نسبت به دو متغیر مستقل از هم x و y تأثیری در نتیجه ندارد و طرف راست روابط (۲-۱۰۱) یکسان است. بنابراین اگر $\vec{F}$ پایستار باشد داریم

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \qquad (۲\text{-}۱۰۲)$$

و با استدلال مشابه

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0 \qquad (۲\text{-}۱۰۳)$$

اما عبارت‌هایی که در روابط (الف-۱۰۲) و (ب-۱۰۲) صفر شده‌اند مؤلفه‌های برداری هستند که آن را کرل $\vec{F}$ می‌نامیم و با $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ نشان می‌دهیم. در واقع اگر عملگر $\vec{\nabla}$ که آن را در رابطه (ب-۸۷) تعریف کرده‌ایم را مشابه یک بردار معمولی در بردار $\vec{F}$ ضرب خارجی کنیم، با توجه به قاعدهٔ ضرب خارجی ...... نتیجهٔ آن چنین است

$$\nabla\times F=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (۱۰۴-ب)$$

$$=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{e}_y+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z$$

البته توجه دارید که مؤلفه‌های $\vec{\nabla}$ از جنس مشتق‌گیری هستند و وقتی در مؤلفه‌های F ضرب می‌شوند در حقیقت از آنها مشتق می‌گیرند.

بنابراین روابط (الف-۱۰۲) و (ب-۱۰۲) را می‌توان چنین جمع‌بندی کرد

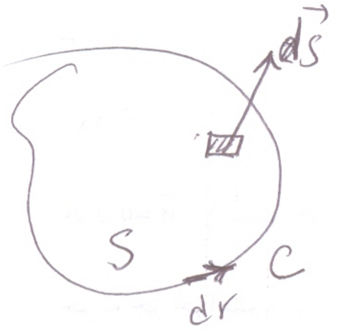
"شرط لازم و کافی برای آنکه نیروی $\vec{F}$ پایستار باشد آن است که کرل آن صفر باشد."

خوانندهٔ دقیق ممکن است توجه کرده باشد که ما در بالا فقط شرط لازم برای گزارهٔ فوق را اثبات کردیم؛ یعنی نشان دادیم که اگر F پایستار باشد کرل آن صفر است. برای اثبات شرط کافی باید از قضیه‌ای موسوم به قضیه استوکس در آنالیز

برداری استفاده کنیم که ما در اینجا آن را بدون اثبات نقل می‌کنیم.

قضیه استوکس: اگر منحنی بسته C رویه S را در فضای سه بعدی محصور کرده باشد داریم

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{s} \qquad (۲-۱۰۵)$$



شکل ۲-۱۹

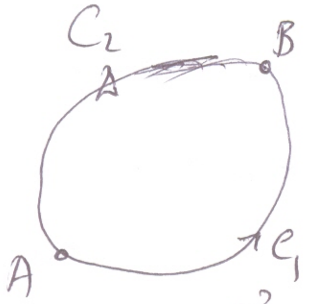
شکل (۲-۱۹) شمای مسئله را نشان می‌دهد.
سطح S ناحیه‌ای متناهی از یک رویه دوبعدی در فضای سه بعدی است که مرز آن منحنی C است. بردار $d\vec{r}$ در انتگرال‌گیری روی خم C جزء کوچکی از این خم را در طول خم نشان می‌دهد.
منظور از علامت $\oint$ آن است که انتگرال‌گیری از یک نقطه روی خم C آغاز می‌شود و به همان نقطه ختم می‌شود. بردار $d\vec{s}$ در سمت راست مربوط است به جزء کوچکی از سطح S. اندازه $d\vec{s}$ برابر سطح این عنصر دیفرانسیلی سطح است و جهت آن عمود بر عنصر سطح است.
انتگرال‌گیری روی تمام سطح S انجام می‌شود. اگر خم C را در جهت مثلثاتی طوری طی کنیم که انگشتان دست راست آن را نشان دهد، جهت بردارهای $d\vec{s}$ در سمتی است که شست دست راست نشان می‌دهد.

حال اگر برای نیروی F در ناحیه‌ای از فضا داشته باشیم $\nabla\times F=0$ آنگاه سمت راست رابطه (۲-۱۰۵) متحد با صفر است. در نتیجه برای هر

خم بسته C در فضای سه بعدی داریم

$$\oint_C F.dr = 0 \qquad (۱۰۶-۲)$$

اکنون دو نقطه دلخواه A و B روی خم C را در نظر بگیرید (شکل ۲-۲۰). انتگرال (۱۰۶-۲) را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد و چنین نوشت:



شکل (۲-۲۰)

$$\int_{A \atop C_1}^{B} F.dr + \int_{B \atop C_2}^{A} F.dr = 0 \qquad (۱۰۷-۲)$$

در انتگرال نخست عناصر طول $\vec{dr}$ از A به B روی مسیر C_1 و در انتگرال دوم از B به A ولی روی مسیر C_2 است. اگر در انتگرال دوم جای نقاط ابتدا و انتها را عوض کنیم و ترتیب انتگرال گیری را تغییر دهیم کلیه $\vec{dr}$ ها تغییر جهت می‌دهند و انتگرال در یک علامت منفی ضرب می‌شود. بنابراین رابطه (۱۰۷-۲) نتیجه می‌دهد

$$\int_{A \atop C_1}^{B} F.dr = \int_{A \atop C_2}^{B} F.dr \qquad (۱۰۸-۲)$$

یعنی انتگرال از A تا B برای مسیرهای C_1 و C_2 یکی است. اگر مسیر C و نیم مسیرهای C_1 و C_2 دلخواه باشند رابطه (۱۰۸-۲) می‌گوید $\int_A^B F.dr$ برای همه مسیرها یکسان است و فقط به نقاط ابتدا و انتها بستگی دارد. این یعنی آنکه نیروی

$\vec{F}$ پایستار است. به این ترتیب شرط کافی برای گزاره ذکر شده بعد از رابطه (۳-۱۰۴) نیز اثبات می‌شود. به طور خلاصه می‌توان گفت هر یک از شرایط زیر به معنای آن است که نیروی F پایستار است:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \qquad a$$

$$\nabla \times F = 0 \qquad b \qquad (۳-۱۰۹)$$

$$\int_A^B F.dr = \text{مستقل از مسیر} \qquad c$$

$$\oint_C F.dr = 0 \qquad d$$

۳-۸- کاربردهایی از روش پتانسیل

در این قسمت به بررسی چند تابع انرژی پتانسیل مهم می‌پردازیم.

الف- نیروی ثابت-

اگر نیروی F مولفه‌های ثابتی داشته باشد، مشتق‌های آنها همگی صفرند و شرط $\nabla \times F = 0$ به وضوح برقرار است. بنابراین هر نیروی ثابتی پایستار است. شکل کلی انرژی پتانسیل برای نیروی ثابت $\vec{F} = F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z$ را می‌توان به صورت زیر پیشنهاد داد

$$V(x,y,z) = -F_x(x-x_0) - F_y(y-y_0) - F_z(z-z_0)$$

$$= -\vec{F_0}(\vec{r}-\vec{r_0}) \qquad (۳-۱۱۰)$$

که در آن نقطه $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ مبدأ پتانسیل فرض شده است. بنابراین

نیروی ثابت یا انرژی پتانسیل خطی نسبت به مختصات ملازم است.

به عنوان مثال برای نیروی $\vec{F}=-mg\,\hat{e}_y$ انرژی پتانسیل از رابطه (ب - ۱۱۰) به صورت $V(x,y,z)=mgy+C$ درمی‌آید که برای خواننده آشنا ست. همچنین اگر ذره‌ای با بار q تحت اثر میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}=E_0\hat{e}_x$ باشد، ~~انرژی پتانسیل~~ نیروی وارد بر آن $\vec{F}=qE_0\hat{e}_x$ است و انرژی پتانسیل آن به صورت $V(x,y,z)=qE_0x+C$ است.

ب - نیروی وابسته به مکان یکبعدی.

هر نیرویی که به صورت $\vec{F}=F(x)\,\hat{e}_x$ باشد شرایط (ب - ۱۰۲) و (ب - ۱۰۳) را برقرار می‌کند، یعنی کرل آن صفر است. چنانکه در بخش (ب - ۶) به تفصیل دیدیم انرژی پتانسیل برای چنین دستگاهی به صورت $V=V(x)+C$ است که $F(x)=-\frac{dV}{dx}$. در واقع با توجه به تعریف گرادیان می‌توان دید

$$-\vec{\nabla}V=\left(-\frac{dV}{dx}\right)e_x=F(x)\,\hat{e}_x$$

به عنوان مثال با گرادیان گرفتن از پتانسیل فنر یعنی $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$ نیروی $\vec{F}=-kx\,\hat{e}_x$ حاصل می‌شود.

ج - نوسانگر سه بعدی ناهمسانگرد (هارمونیک).

فرض کنید ذره‌ای تحت اثر نیروی بازگرداننده زیر قرار داشته باشد

$$\vec{F} = -k_1 x\,\hat{e}_x - k_2 y\,\hat{e}_y - k_3 z\,\hat{e}_z \qquad (۱۱۱-۳)$$

این ذره در مبدأ مختصات در حال تعادل است، یعنی نیروی وارد بر آن در مبدأ مختصات صفر است. و اگر از این نقطه به هر طرف در سه راستای مختلف x، y و z که حرکت کند نیرویی که به آن وارد می‌شود می‌خواهد آن را به نقطه تعادل باز گرداند. البته نیرو در سه راستای مختلف خواص یکسانی ندارد. در جهت‌های سه گانه سه نیروی فنری با ضرایب متفاوت k_1، k_2 و k_3 به جسم وارد شده است و به همین جهت آن را نوسانگر ناهمسانگرد نامیده‌ایم. در حالت خاصی که $k_1=k_2=k_3$ نوسانگر همسانگرد می‌شود.

از رابطه (۱۱۱-۳) به وضوح می‌توان دید که کرل $\vec{F}$ صفر است. مثلاً مشتق F_x نسبت به y و مشتق F_y نسبت به x صفر است و مؤلفه z برای [illegible] صفر می‌شود و به همین ترتیب برای مؤلفه‌های دیگر. برای یافتن انرژی پتانسیل دستگاه باید $V(x,y,z)$ را طوری بیابیم که

$$-k_1 x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$-k_2 y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (۱۱۲-۳)$$
$$-k_3 z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

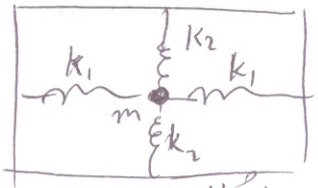
حل معادلات (۱۱۲-۳) را به سهولت می‌توان به شکل زیر حدس زد

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 y^2 + \frac{1}{2}k_3 z^2 + C \qquad (۱۱۳-۳)$$

اگر مبدأ پتانسیل را همان مبدأ مختصات بگیریم $C=0$ خواهد شد.

حل معادلات حرکت و بررسی انواع حرکت برای

نوسانگر هماهنگ دو و سه بعدی را به فصل بعد موکول می کنیم. برای آنکه تجسمی از یک نوسانگر هماهنگ ناهمسانگرد دو بعد داشته باشید دستگاه شکل (۲-۲۱) را در نظر بگیرید.


(شکل ۲-۲۱)

در این دستگاه جسم m در مرکز یک قاب مستطیل شکل با چهار فنر مهار شده است. اگر ضریب فنرهای افقی و عمودی متفاوت باشد دستگاه ناهمسانگرد خواهد بود. خواننده می تواند به عنوان تمرین از استفاده از روشهای تقریبی نشان دهد که انرژی پتانسیل دستگاه برای جابه جایی کوچک از وضعیت تعادل در اولین تقریب از نوع رابطه (۲-۱۱۴) (بدون جمله شامل z) است.

۱- نیروی مرکزی -

نیروی $\vec{F}$ را مرکزی گوییم اگر در مختصات کروی به شکل زیر باشد

$$\vec{F} = F(r)\,\hat{e}_r \qquad (۲-۱۱۴)$$

به بیان دیگر نیروی مرکزی است که در راستای شعاعی نسبت به یک مبدأ مختصات خاص، که آن را مرکز نیرو می نامند، باشد و اندازهٔ آن نیز فقط به فاصله از مرکز نیرو بستگی داشته باشد.

برای آنکه از روش $\nabla \times F = 0$ پایستار بودن نیروی مرکزی را بررسی کنیم لازم است شکل کلی کرل یک میدان برداری در مختصات کروی را بدانیم. از این روش پایستار بودن نیروی مرکزی به اثبات می رسد. به جای آن، سعی می کنیم مستقیماً کار نیروی $F(r)$ را حساب کنیم و نشان

دهیم به مسیر بستگی ندارد یعنی از معیار (۳-۱۰۹) استفاده کنیم . به بیان دیگر مستقیماً سعی می‌کنیم انرژی پتانسیل یک نقطه از فضا را به دست آوریم. برای این کار از تعریف مستقیم انرژی پتانسیل، رابطه (۳-۱۰۰) استفاده می‌کنیم. با استفاده از رابطه ..... برای $d\vec{r}$ از مختصات کروی داریم

$$V(\vec{r})=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}F(r)\hat{e}_r\cdot(dr\,\hat{e}_r+r\,d\theta\,\hat{e}_\theta+r\sin\theta\,d\phi\,\hat{e}_\phi)$$

$$=-\int_{r_0}^{r}F(r)\,dr \qquad (۳-۱۱۵)$$

چنانکه دیده می‌شود حاصل، یک انتگرال یگانه روی متغیر r است. کافی است مشابه مسایل یک بعدی تابع $V(r)$ را بیابیم به طوری که $F(r)=-\frac{dV}{dr}$ در این صورت

$$V(\vec{r})=V(r)+c \qquad (۳-۱۱۶)$$

به بیان دیگر انرژی پتانسیل نیز تابعی از مختصه r (فاصله از مرکز نیرو) است که منفی مشتق آن با $F(r)$ برابر باشد. همین که توانستیم بدون نیاز به دانستن مسیر ذره و فقط با دانستن مختصه r در ابتدا و انتها $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را حساب کنیم نشان دهنده پایستار بودن نیروی F است. به بیان کلی‌تر اگر سعی کنیم انرژی پتانسیل را حساب کنیم، همین که این کار بدون دانستن مسیر ذره قابل انجام باشد، به معنای پایستار بودن نیرو است.

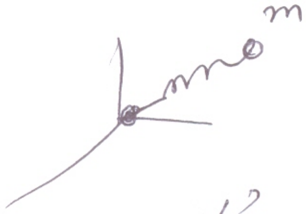
مثال ۱- نوسانگر هماهنگ سه بعدی همسانگرد-

نیروی مرکزی $\vec{F}=-k\vec{r}$ را در نظر بگیرید. در اینجا $F(r)=-kr$ است. از رابطه (۳-۱۱۵) داریم

$$V(r)=\frac{1}{2}kr^2+c \qquad (۳-۱۱۶)$$

اگر مبدأ مختصات را مبدأ پتانسیل نیز بگیریم $V(r)=\frac{1}{2}kr^2$

این مثال حالت خاصی از نوسانگرهای هماهنگ سه بعدی رابطه (۲-۱۱۱) است که در آن $k_1=k_2=k_3=k$. در اینجا معادله حرکت در هر سه بعد مشابه است. به عنوان مثال برای مختصه x به صورت $m\ddot{x}+kx=0$ در می‌آید. مصداق فیزیکی این دستگاه جرمی است که مطابق شکل (۲-۲۲) در انتهای فنری به ضریب k قرار گرفته و انتهای فنر به مبدأ مختصات متصل شده است.



شکل ۲-۲۲

اگر فرض کنیم طول طبیعی فنر ناچیز است، نیرو به صورت $\vec{F}=-kr\hat{e}_r$ خواهد بود. اگر طول طبیعی فنر مثلاً a باشد نیرو به صورت $\vec{F}=-k(r-a)\hat{e}_r$ و پتانسیل به شکل $V(r)=\frac{1}{2}k(r-a)^2$ است، که در آن $V(a)=0$ فرض شده است.

مثال ۲- نیروی عکس مجذوری.

فرض کنیم در رابطه (۲-۱۱۴) داشته باشیم

$$F(r)=\frac{k}{r^2} \qquad (۲-۱۱۷)$$

در این صورت با استفاده از رابطه (۲-۱۱۵) انرژی پتانسیل به صورت

$$V(r)=\frac{1}{2}\frac{k}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{k}{r_0^2}$$

خواهد بود. فاصله r_0 مربوط به جایی است که پتانسیل آن صفر فرض شده است. برای چنین نیرویی طبیعی است که r_0 را فاصله بسیار دور از مرکز نیرو بگیریم، یعنی فرض کنیم انرژی پتانسیل ذره وقتی در فاصله دور از مرکز نیرو است صفر است و با نزدیک شدن به آن تغییر می‌کند. در این صورت جمله $\frac{1}{2}\frac{k}{r_0^2}$ در رابطه فوق کنار می‌رود و داریم

$$V(r)=\frac{1}{2}\frac{k}{r^2} \qquad (۲-۱۱۸)$$

دو مثال مهم از نیروی عکس مجذوری، یکی نیروی الکترواستاتیکی بین بارهای q و q' است که برای آن $K=\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$ و دیگری نیروی گرانش بین جرمهای m و m' است که برای آن $K=-Gmm'$. در فصل پنجم به تفصیل حرکت یک ذره تحت اثر نیروی عکس مجذوری را مطالعه خواهیم کرد. فعلاً در اینجا می‌توانیم برخی از نتایج قانون پایستگی انرژی را مثلاً برای نیروی گرانش بررسی کنیم.

به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم حرکت پرتابه‌ای را که از سطح زمین با سرعت اولیه v_0 به سمت بیرون زمین پرتاب می‌شود را با فرض چشم پوشی از نیروی مقاومت هوا به دست آوریم. اگر جرم پرتابه m و جرم زمین M فرض شود، از قانون پایستگی انرژی (۲-۱۰۰) داریم

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{r}=E \qquad (۲-۱۱۹)$$

انرژی دستگاه را با استفاده از اطلاعات هنگام پرتاب می‌توان به دست آورد. به ازای $r=R$ داریم $v=v_0$ در نتیجه

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GmM}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{R} \qquad (۲-۱۲۰)$$

با استفاده از رابطه (۲-۱۲۰) می‌توان اندازه سرعت پرتابه را در هر فاصله از زمین به دست آورد. دقت کنید که این مسئله را در بعد در نظر گرفتیم و مسیر پرتابه لزوماً شعاعی نیست. به عنوان مثال برای پرتابه‌ای که مجدداً تحت اثر نیروی گرانش به زمین برمی‌گردد، شکل مسیر حدوداً شبیه چیزی

است که در شکل (۲-۲۲) نشان داده شده است.
برای بررسی کامل حرکت و یافتن شکل مسیر (و مثلاً پیدا کردن حداکثر فاصله‌ای که پرتابه از زمین خواهد داشت) لازم است معادلات حرکت به طور کامل حل شوند. با این وجود می‌توان اطلاعات مفیدی از قانون پایستگی انرژی (۲-۱۲۰) به دست آورد.

شکل (۲-۲۲)

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم در چه صورتی جسم می‌تواند از میدان جاذبه گرانشی زمین خارج شود. لازمه چنین چیزی آن است که ~~وقتی~~ جسم آنچنان انرژی داشته باشد که تا $\infty \to r$ بتواند برود. در فواصل دور پتانسیل $-\frac{GMm}{r}$ به صفر میل می‌کند. اگر مقدار E در رابطه (۲-۱۱۹) مثبت باشد به معنای آن است که وقتی پرتابه کاملاً از زمین دور می‌شود دارای انرژی مثبت جنبشی است. بنابراین حالت حدی برای خروج از میدان گرانش زمین $E=0$ است. با قرار دادن این مقدار، از رابطه (۲-۱۲۰) داریم

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \qquad (۲-۱۲۱)$$

سرعت اولیه پرتابه در این حالت را سرعت فرار یا v_e می‌نامیم. از رابطه (۲-۱۲۱) داریم

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (۲-۱۲۲)$$

در سطح زمین نیروی گرانش به صورت $F = mg = \frac{GMm}{R^2}$ است.

بنابراین $GM = gR^2$ و

$$v_e = \sqrt{2gR} \qquad (۱۲۳-۲)$$

برای زمین $R \simeq 6.4 \times 10^6 m$ و $g \simeq 9.81 m/s^2$ در نتیجه $v_e \simeq 11 km/s$. پرتابه‌ای که قبل از خروج از جو زمین بتواند به چنین سرعتی دست یابد نهایتاً می‌تواند از حوزهٔ جاذبهٔ گرانشی زمین خارج شود.

از رابطه (۲-۱۲۳) می‌توان دید که هرچه جرم یک ستاره بزرگتر و شعاع آن کوچکتر باشد، سرعت فرار از آن بزرگتر است. حال سؤال این است که آیا سرعت فرار می‌تواند تا هر اندازه‌ای بزرگ باشد. از نظریه نسبیت خاص می‌دانیم که هیچ سرعتی بالاتر از سرعت نور، c امکان‌پذیر نیست. همچنین از نظریه‌های مربوط به تحول ستارگان می‌دانیم که هر ستاره‌ای بعد از آن که منابع سوخت هسته‌ای‌اش تمام شد (یعنی اتمهای سبک آن به هم پیوند خوردند و اتمهای سنگین‌تر تولید کردند) دچار انقباض ناشی از گرانش می‌شود و در هم فرو می‌ریزد. به این پدیده رمبش می‌گویند. ستاره زمانی رمبیده می‌شود که جاذبه گرانشی بخشهای داخلی آن، بخش‌های خارجی‌تر را در خود ببلعد و انبساط ناشی از تولید انرژی در داخل ستاره نتواند مانع آن شود. حال فرض کنید ستاره‌ای به جرم M رمبیده شود و شعاع آن کاهش یابد. می‌خواهیم بدانیم به ازای چه شعاعی، سرعت فرار از آن با سرعت نور برابر می‌شود. اگر در رابطه (۲-۱۲۳) $v_e = c$ قرار دهیم شعاع ستاره که به آن شعاع شوارتزشیلد گفته می‌شود چنین خواهد بود

$$R_{sc} = \frac{2GM}{c^2} \qquad (۱۲۴-۲)$$

وقتی ستاره رمبیده شود و شعاع آن از شعاع شوارتزشیلد کوچکتر شود هیچ ذره‌ای حتی فوتونها (که ذره نور است) نمی‌تواند از آن خارج شود. به چنین جرمی یک سیاهچاله گفته می‌شود. سیاهچاله هیچ نوع تابشی ندارد و نام آن نیز از همین خاصیت ناشی می‌شود. اما در واقع یک سیاهچاله میدان گرانشی بسیار قوی تولید می‌کند که می‌تواند بر حرکت اجسام پیرامون خود و حتی مسیر نور ستاره‌های دیگر مؤثر باشد. انتظار طبیعی اخترفیزیکدان‌ها این است که در آسمان اجرامی که در فرایند تکوین طبیعی خود به مرحله سیاهچاله شدن رسیده‌اند وجود داشته باشند و بتوان به طور غیرمستقیم آنها را رصد کرد. در سال‌های اخیر نقاط متعددی در آسمان به عنوان کاندیدای سیاهچاله تعیین شده‌اند. البته لازم به ذکر است که برای اجرام بسیار بزرگ که میدان گرانشی بسیار قوی است فیزیک نیوتنی دقیقاً معتبر نیست و باید از نظریه دقیق‌تر که نسبیت عام است استفاده کرد. می‌توان نشان داد که نظریه نسبیت عام در حد میدانهای ضعیف نتایجی مشابه به مکانیک نیوتنی دارد. اما شایان توجه است که شعاع شوارتزشیلد از نظریه نسبیت عام نیز مطابق رابطه (۴-۱۲۴) به دست می‌آید.

۴-۹- قانون عمومی پایستگی انرژی

تا اینجا تلویحاً ما فقط یک نیروی وابسته به مکان $\vec{F}$ که بر ذره‌ای به جرم m وارد می‌شد را در نظر گرفتیم. اگر بیش از یک نیرو بر ذره

~~(۸۴-۳)~~

وارد شود قضیه کار انرژی که از قانون دوم نیوتن نتیجه شده بود به صورت زیر نوشته می شود

$$\Delta K = \int_A^B F.dr = W_F \qquad (۱۲۵-۳)$$

در این رابطه $\vec{F}=\sum_i \vec{F_i}$ نیروی برآیند وارد به ذره و W_F کار نیروی برآیند است. با استفاده از تعریف کار داریم

$$W_F = \int F.dr = \int (\vec{F_1}+\vec{F_2}+\dots).dr$$

$$= W_{F_1} + W_{F_2} + \dots \qquad (۱۲۶-۳)$$

که در آن از ~~...~~ توزیع پذیری ضرب داخلی در جمع برداری استفاده کرده ایم. در رابطه (۳-۱۲۶) برای راحتی از نوشتن حدود انتگرال ها و نیز مسیر انتگرال گیری خودداری کرده ایم. اگر کلیه نیروهای وارد به ذره پایستار باشند برای هریک کار انجام شده $-\Delta V$ مربوط به آن نیرو است. بنابراین در این حالت رابطه (۳-۱۲۶) به صورت زیر در می آید:

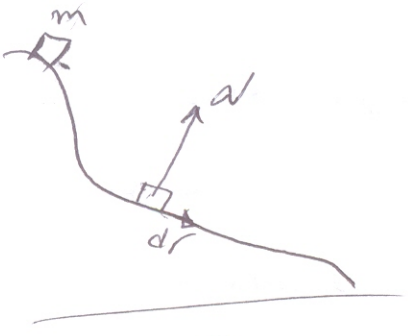
$$\Delta K = -\Delta V_1 - \Delta V_2 - \dots \qquad (۱۲۷-۳)$$

که نتیجه اش را می توان به صورت $\Delta E = 0$ نوشت که در آن

$$E = K + V_1 + V_2 + \dots = \text{ثابت} \qquad (۱۲۸-۳)$$

حال فرض کنیم ذره علاوه بر نیروهای پایستار تحت تأثیر نیروهای قیدی نیز باشد. خوشبختانه این مورد چندان نتیجه را تغییر نمی دهد چرا که کار نیروهای قیدی در تغییر پیکربندی یک دستگاه صفر است. اجازه دهید یک به یک موارد را بررسی کنیم. برای نیروی عمودی سطح، چنانچه می دانیم این نیرو هر مقداری داشته باشد بر سطح تماس در جسم عمود است.

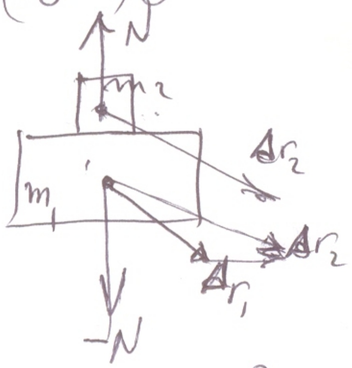
از طرفی هر جابه جایی کوچک جسم در امتداد سطح تماس است و به طور موضعی



شکل (۲-۲۴)

بر نیروی عمودی سطح عمود است. به عنوان مثال فرض کنید جسم کوچک m روی یک تپه ماهور به پایین سر می خورد. چنانکه در شکل (۲-۲۴) می بینید در هر جابه جایی کوچک $\vec{dr}$ در امتداد سطح مورد نظر، $\vec{N}\cdot\vec{dr}$ صفر است چون $\vec{N}$ بنابر ماهیت خود عمود بر سطح است. در حالت کلی تر که دو جسم در تماس با هم و هر دو در حال حرکت نسبت به یک ناظر باشند، چنانکه شکل (۲-۲۵) نشان می دهد فرض کنید جسم m_1 جابه جایی $\vec{\Delta r_1}$ و جسم m_2 جابه جایی $\vec{\Delta r_2}$ را داشته باشند که هیچکدام بر $\vec{N}$ عمود نیستند. اما مجموع کار نیروی عمودی سطح که دو جسم بر هم وارد می کنند عبارت است از

~~شکل (۲-۲۵)~~



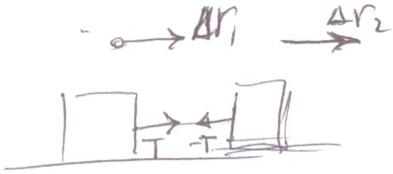
شکل (۲-۲۵)

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta W_1 + \Delta W_2\\ &= \vec{N}\cdot\vec{\Delta r_2} + (-\vec{N})\cdot\vec{\Delta r_1}\\ &= \vec{N}\cdot(\vec{\Delta r_2} - \vec{\Delta r_1}) \qquad (۲-۱۲۹)\\ &= \vec{N}\cdot\vec{\Delta r} = 0\end{aligned}$$

به عبارت دیگر جابه جایی نسبی دو جرم در تماس با هم فقط می تواند موازی سطح تماس باشد و بر $\vec{N}$ عمود است.

نیروی کشش نخ نیز چنین وضعیتی دارد. همواره نخ بین دو جسم اتصال برقرار می کند. مادامی که نخ کشیده شده است جابه جایی دو جسم یکسان است و کار مجموع نیروی کشش نخ روی آن دو صفر می شود. به شکل

(۳-۲۶) توجه کنید. در نتیجه



شکل (۲-۲۶)

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2$$
$$= T.\Delta r + (-T).\Delta r = 0 \quad (۲-۱۰)$$

برای نیروی اصطکاک ایستایی کار از دو مورد فوق آسان تر است. در این حالت دو جسم در سکون نسبت به یکدیگر هستند و محل تماس آنها نسبت به هر یک ساکن است. بنابراین کار نیروی اصطکاک ایستایی آنها ~~هم~~ مشابه رابطه (۲-۱۰) صفر است. یعنی در این حالت نیز نیروها بنا به قانون سوم نیوتن مساوی و مختلف الجهت است اما جابجایی ها نسبت به یک ناظر خارجی یکسان است.

صفر شدن کار نیروهای قیدی نکته بسیار مهمی است. اگر این نکته نبود، قانون پایستگی انرژی صرفاً برای یک نیروی پایستار، نتیجه ای ریاضی ناشی از انتگرال گیری روی معادلات حرکت به شمار می رفت. برای روشن شدن موضوع به دو مثال زیر توجه کنید

مثال ۱- فرض کنید در شکل (۲-۲۴) جسم از ارتفاع h بالای تپه ماهور به پایین سر می خورد و سطح میز بدون اصطکاک است. سرعت جسم در پایین چقدر است؟

از قضیه کار انرژی برای این جسم داریم

$$\Delta K = W_{وزن} + W_N = -\Delta V_{وزن} + 0$$

بنابراین قانون پایستگی انرژی به صورت زیر حتی با وجود نیروی عمودی سطح نیز برقرار است

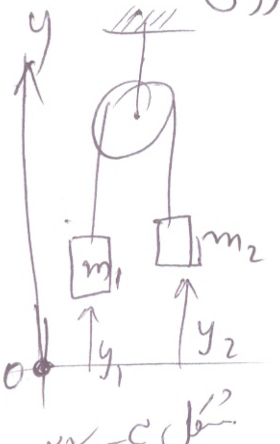
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = E = ثابت$$

اگر تساوی انرژی‌ها در بالا و پایین تپه ماهور را در نظر بگیریم داریم

$$0 + mgh = \frac{1}{2} m v_f^2 \qquad (۷-۱۴۰)$$

که v_f اندازه سرعت در پایین سطح شیبدار است. از رابطه ۷-۱۴۰ حاصل می‌شود $v_f=\sqrt{2gh}$. دقت کنید که ما مسئله را به طور کامل حل نکرده‌ایم و مختصات جسم را به عنوان تابعی از زمان نمی‌شناسیم. این کار در عمل نیازمند آن است که معادلات ریاضی که شکل سطح را برای ما توصیف می‌کنند بدانیم. اما روش انرژی به کمک اصل صفر بودن کار نیروهای قیدی ما را قادر می‌سازد اطلاعات مفیدی درباره حرکت، حتی بدون حل کردن کامل معادلات حرکت به دست آوریم.

مثال ۲- شتاب ماشین آتوود را با استفاده از قانون پایستگی انرژی به دست آورید.



شکل ۷-۲۷

ماشین آتوود (مطابق شکل ۷-۲۷) از دو جسم تشکیل شده که به یک نخ با هم مرتبط‌اند و هر دو با زمین برهم‌کنش گرانشی دارند. هر کدام از دو جسم تحت اثر نیروی کشش نخ نیز هستند. اما با توجه به قید مسئله جمع کار نیروهای کشش نخ روی دو جسم صفر می‌شود. (توصیه می‌شود خواننده این را با دقت نشان دهد). حال فرض کنیم مختصه قائم جسم‌ها y_1 و y_2 باشد. از قانون پایستگی انرژی با توجه به صفر شدن کار نیروهای کشش نخ داریم

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = \text{ثابت} \qquad (۷-۱۴۱)$$

با توجه به اینکه $v_1=\dot y_1$ و $v_2=\dot y_2$ و قید $y_1+y_2=$ ثابت داریم

$$\frac{1}{2}m_1\dot y_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot y_1^2+m_1 g y_1-m_2 g y_1=\text{ثابت} \qquad (۲-۱۴۲)$$

اگر از طرفین این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)(2\dot y_1\ddot y_1)+(m_1-m_2)g\dot y_1=0$$

که با ساده کردن نسبت به $\dot y_1$ و حل نسبت به داریم

$$\ddot y_1=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2} \qquad (۲-۱۴۳)$$

نکته بسیار جالب آن است که شتاب دستگاه را بدون نیاز به داشتن نیروی کشش نخ به دست آوردیم.

حال فرض کنید جسمی علاوه بر نیروهای پایستار و نیروهای قیدی تحت اثر نیروهای غیرپایستاری مثل اصطکاک جنبشی و امثال آن نیز باشد. در این حالت قضیه کار-انرژی به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta K=W_{\text{پایستار}}+W_{\text{قیدی}}+W_{\text{غیرپایستار}} \qquad (۲-۱۴۴)$$

چون $W_{\text{قیدی}}=0$ و $W_{\text{پایستار}}=-\Sigma\Delta V$، به دست می‌آید

$$\Delta(K+\Sigma V)=W_{\text{غیرپایستار}} \qquad (۲-۱۴۵)$$

بنابراین مجموع انرژی جنبشی و انرژی‌های پتانسیل در این حال ثابت نیست و تغییر آن با $W_{\text{غیرپایستار}}$ مساوی است، یعنی

$$\Delta E=W_{\text{غیرپایستار}} \qquad (۲-۱۴۶)$$

در این حالت تجربه ما با دستگاه‌های فیزیکی نشان می‌دهد که امکان ندارد انرژی مکانیکی دستگاه تغییر کند، بدون آنکه تغییرات انرژی در مشخصات فیزیکی دستگاه و محیط به وجود آمده باشد. مثلاً جسمی را در نظر بگیرید که روی یک میز افقی با سرعت اولیه v حرکت می‌کند و بر اثر اصطکاک جنبشی با سطح میز نهایتاً می‌ایستد. در این مثال چون حرکت در یک سطح افقی صورت گرفته پتانسیل تغییر نکرده است. اما انرژی جنبشی از مقدار اولیه $\frac{1}{2}mv^2$ به صفر کاهش یافته است. بنابراین $\Delta E = -\frac{1}{2}mv^2$ حال آیا هیچ اتفاق فیزیکی دیگری نیفتاده و همه چیز مثل قبل است؟ پاسخ منفی است. می‌دانیم که اصطکاک منجر به گرم شدن اجسامی که در حرکت نسبت به هم هستند می‌شود، بنابراین انرژی مکانیکی دستگاه تغییر کرده اما در عوض جسم و محیط آن کمی گرم شده‌اند. گرم شدن جسم و محیط را می‌توان به افزایش انرژی درونی آنها مربوط کرد. به بیان دقیق‌تر کاهش انرژی جنبشی و افزایش انرژی درونی به معنای آن است که انرژی حرکت منظم ذرات تشکیل دهنده جسم به انرژی حرکت نامنظم آنها تبدیل شده است. این مطلب بیانی از قانون اول ترمودینامیک است، که بیانگر اصل پایستگی انرژی در حوزه‌ای از تحولات است که علاوه بر حرکت‌های مکانیکی مبادله گرما بین دستگاه‌ها را نیز شامل می‌شود.

به طور خلاصه می‌توان گفت در همه تحولات فیزیکی که در جهان پیرامون خود می‌بینیم همواره شاهدیم که تغییر انرژی‌های شناخته

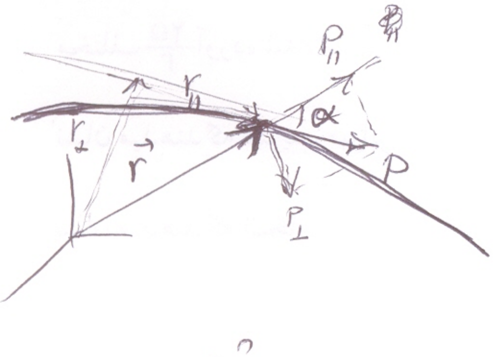
شده منجر به تحولاتی می‌شود که برای آنها نیز می‌توان صورتهای دیگری از تغییر انرژی را منظور داشت. به این ترتیب همواره قادریم انواعی از انرژی را به دستگاههای فیزیکی نسبت دهیم که قانون پایستگی انرژی به عنوان یک اصل استوار فیزیکی پا برجا بماند. نکته جالب آن است که با وجود آنکه خاستگاه اولیه اصل پایستگی انرژی مکانیک نیوتنی است، اما حوزهٔ اعتبار آن بسیار فراتر از مکانیک نیوتنی است، به طوری که شامل مکانیک کوانتمی تا ریزترین ابعاد شناخته شده و نیز نظریه نسبیت، چه نسبیت خاص و چه نسبیت عام برای سرعتها و میدانهای گرانشی بزرگ نیز می‌شود. در حقیقت بیان صحیح مطلب این نیست که انرژی پایسته است چون نظریه‌های فیزیکی مورد نظر ما چنین اقتضایی دارند، بلکه بیان درست آن است که کلیه مشاهدات و آزمایشهای ما مؤید آن هستند که در تحولات ممکن و واقعی چیزی پایسته است که می‌توان نام انرژی برآن نهاد و جنس فیزیکی آن "جرم در سرعت به توان دو" است. بر این اساس، این نظریه‌های پیشنهادی ما هستند که باید چنان پایه‌ریزی شوند که حاوی اصل پایستگی انرژی باشند. تمام آنچه گفته شد برای قانون‌های پایستگی تکانه خطی و تکانه زاویه‌ای نیز صادق است که در بخشهای بعد بیشتر به آنها خواهیم پرداخت. در فصل های آینده و پس از تسلط به مکانیک لاگرانژی خواهیم دید که قوانین پایستگی انرژی، تکانه و تکانه زاویه‌ای در اصل به تقارن‌های بنیادی طبیعت تحت انتقال و دوران مربوط هستند.

یادآوری می‌کنیم که هر قانون پایستگی بیانگر آن است که از میان بیشمار
رویدادهای قابل تصور بخش بسیار کوچکی از آنها در عمل اتفاق می‌افتند.
قانون پایستگی بیانی ریاضی است برای تشخیص آن دسته رویدادهایی که
واقعاً اتفاق می‌افتند. مثالی بزنیم. در نمایش‌های کارتونی دیده‌اید
که مثلاً یک موش کوچک بر روی یک سر الاکلنگی می‌پرد و گربه‌ای
که بر آن سر الاکلنگ نشسته است را تا آن سوی ابرها به آسمان می‌پراند.
با کمترین اطلاعی از مکانیک کلاسیک می‌دانید که هرگز نمی‌توان با انرژی
مکانیکی اولیه که انرژی پتانسیل وزن یک موش است، گربه‌ای را تا ارتفاع
صدها برابر ارتفاع اولیه موش به هوا پراند. علت جذابیت این قبیل
نمایش‌های تخیلی نیز در همین است که رخدادی را به تصویر می‌کشند که هرگز
در واقعیت امکان‌پذیر نیست. هر روز که می‌گذرد در آزمایشگاه
عظیم LHC در شتابگر سرن میلیاردها میلیارد رخداد فیزیکی به ثبت می‌رسد
که در هیچکدام قوانین پایستگی یادشده نقض نمی‌شود. هرگز دو ذره با هم
برهم‌کنش نمی‌کنند که بدون هیچ تغییر دیگری انرژی آنها افزوده شده باشد.
قرنها از پیدایش مکانیک نیوتنی گذشته است اما هرگز ~~[illegible]~~
آزمایشی مشاهده نشده که در آن پایستگی انرژی نقض شده باشد.
شاید شنیده باشید که یکی از تفنن‌های پاره‌ای از مبتکران در گذشته
و حال ساختن و طراحی ماشین‌های کار دائمی است. در برخی از کتابها
و نوشته‌ها طرحواره‌هایی از ماشین‌های کار دائمی دیده می‌شود. نوعاً چنین
طرحواره‌هایی در گوشه‌هایی از حدود نقض قوانین فیزیکی را شامل می‌شوند.

در عمل نیز هرگز دنیای صنعت و فناوری شاهد ساختن ماشین کار دائمی نبوده است. یکی از نکاتی که اغلب در میان مردم عادی دچار بدفهمی می شود مفهوم تولید انرژی است. اصل پایستگی انرژی حاکی از آن است که ما فقط می توانیم انرژی ها را به هم تبدیل کنیم. در صنایع انرژی کشورها فقط نوعی تبدیل صورت می گیرد. در نیروگاه حرارتی نوعی سوخت مصرف می شود، حرارت تولید می شود، توربین ها انرژی حرارتی را به کار مکانیکی تبدیل می کنند و سرانجام کار مکانیکی به انرژی قابل انتقال الکتریکی تبدیل می شود. البته فعلاً وارد بحث های مربوط به قانون دوم ترمودینامیک و این که در هر یک از این فرایندها مقداری از انرژی به انرژی حرارتی تبدیل می شود نمی شویم. آنچه می خواهیم تاکید کنیم آن است که در هیچ نیروگاهی، انرژی ساخته نمی شود.

گاهی کسانی تصور می کنند انرژی هسته ای منبعی لایزال از انرژی است که وقتی آن را در قلب نیروگاه بگذاریم تا ابد به ما برق می دهد. این تصور همان قدر خطا است که یک آگهی تجاری ادعا کند نوعی باتری برای لوازم برقی ساخته است که تا ابد نیاز به تعویض ندارد!

۳-۱۰- تکانه زاویه ای - گشتاور



شکل ۲-۲۸

ذره ای به جرم m در نظر بگیرید که بردار مکان لحظه ای آن مطابق شکل (۲-۲۸) با $\vec{r}$ نشان داده شده و تکانه خطی آن در لحظه مورد نظر $\vec{p}$ است که بر مسیر حرکت مماس است. بنا به تعریف بردار

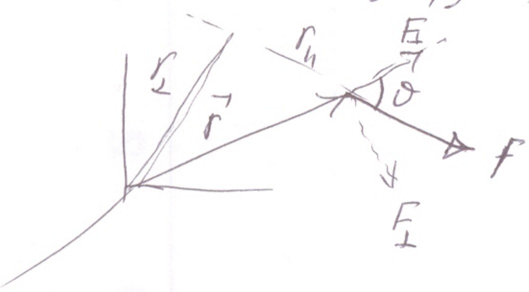
$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v} \qquad (۲-۱۲۷)$$

را اندازه حرکت زاویه‌ای و یا "تکانه زاویه‌ای" ذره می‌نامند. چنانکه از شکل (۲-۲۸) می‌توان دید بزرگی بردار تکانه زاویه‌ای به صورت زیر است

$$|\vec{l}| = rp\sin\alpha = rp_\perp = r_\perp p \qquad (۲-۱۲۸)$$

که در آن α زاویه بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{p}$ است، $p_\perp$ مؤلفه‌ای از $\vec{p}$ است که بر $\vec{r}$ عمود است و $r_\perp$ مؤلفه‌ای از $\vec{r}$ است که بر $\vec{p}$ عمود است. توجه داشته باشید که بردار تکانه زاویه‌ای به غیر از مشخصات دینامیکی ذره به انتخاب مبدأ مختصات نیز بستگی دارد.

به گونه مشابه می‌توان بردار گشتاور یک نیرو را نیز تعریف کرد. فرض کنید $\vec{F}$ یکی از نیروهای وارد به ذره‌ای به جرم m است که $\vec{r}$ بردار مکان لحظه‌ای آن است. در لحظه مورد نظر گشتاور نیروی $\vec{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود



شکل (۲-۲۹)

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} \qquad (۲-۱۲۹)$$

بزرگی گشتاور نیروی F را نیز می‌توان مطابق شکل (۲-۲۹) و شبیه به روابط (۲-۱۲۸) به صورت زیر نوشت:

$$|\vec{\tau}| = rF\sin\theta = rF_\perp = r_\perp F \qquad (۲-۱۴۰)$$

که در آن $F_\perp$ مؤلفه $\vec{F}$ در راستای عمود بر r و $r_\perp$ مؤلفه $\vec{r}$ در راستای عمود بر $\vec{F}$ است. گشتاور نیز مشابه تکانه زاویه‌ای به انتخاب مبدأ مختصات بستگی دارد. گشتاور را نیز می‌توان برای هر یک از نیروهای وارد به ذره و برای برآیند آنها نیز محاسبه کرد. با توجه به خاصیت توزیع

ضرب خارجی در جمع برداری می توان نوشت:

$$\vec{\tau}_F = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum \vec{\tau}_i \qquad (۱۴۱-۲)$$

رابطه اخیر نشان می دهد گشتاور نیروی برآیند جمع برداری گشتاورهای نیروهایی است که به ذره وارد می شود.

تا اینجا دو تعریف برای تکانه زاویه ای و گشتاور ارائه کردیم. اما این تعاریف چرا مفید هستند. برای این کار اجازه دهید از رابطه (۲-۱۲۷) که تعریف تکانه زاویه ای است نسبت به زمان مشتق بگیریم. با توجه به خاصیت ..... برای مشتق گیری از ضرب خارجی دو بردار داریم

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt} \qquad (۱۴۲-۲)$$

جمله اول سمت راست رابطه فوق $\vec{v} \times (m\vec{v})$ است که صفر می شود. جمله دوم نیز گشتاور نیروی برآیند وارد به ذره است. بنابراین می توان گفت شکل جدیدی از قانون دوم نیوتن به زبان گشتاور و تکانه زاویه ای به صورت زیر قابل بیان است

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i \qquad (۱۴۳-۲)$$

همان طور که در انتهای بخش (۲-۴) برای نیرو و تکانه گفتیم، در اینجا نیز می توانیم از رابطه (۲-۱۴۳) چنین نتیجه گیری کنیم

$$\vec{\tau} = 0 \iff \vec{l} = \text{ثابت} \qquad (۱۴۴-۲)$$

یعنی شرط لازم و کافی برای پایستگی تکانه زاویه ای آن است که گشتاور نیروی برآیند وارد به ذره صفر باشد. رابطه (۲-۱۴۴) برای هر یک از مؤلفه ها نیز صادق است. مثلاً می توان نوشت

$$\tau_z = 0 \iff l_z = \text{ثابت} \qquad (۱۴۵-۲)$$

یکی از موارد مهمی که قضیه فوق اهمیت پیدا می‌کند مربوط به نیروی مرکزی است. گشتاور نیروی مرکزی $\vec{F}=F(r)\hat{e}_r$ نسبت به مرکز نیرو چنین است

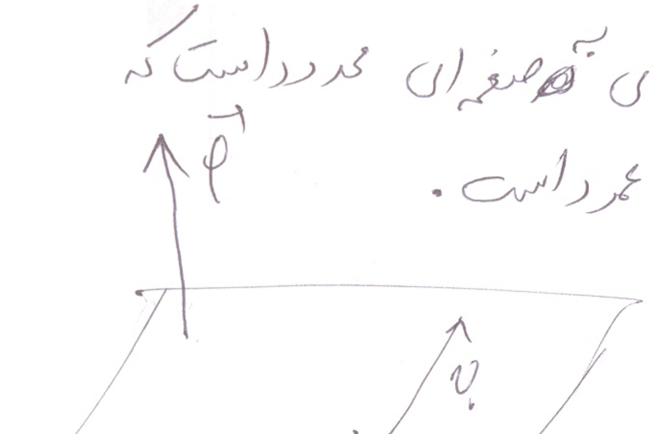
$$\vec{\tau}=\vec{r}\times(F(r)\hat{e}_r)$$
$$=r\hat{e}_r\times F(r)\hat{e}_r=0 \qquad (۱۴۶-۲)$$

بنابراین از رابطه (۱۴۴-۲) نتیجه می‌شود که تکانه زاویه‌ای ذره‌ای که تحت اثر نیروی مرکزی قرار دارد ثابت است، البته به شرط آنکه مبدأ مختصات محل مرکز نیرو گرفته شود:

$$\vec{F}=F(r)\hat{e}_r \Longrightarrow \vec{l}=\text{ثابت} \qquad (۱۴۷-۲)$$

ثابت بودن بردار تکانه زاویه‌ای دو نتیجه مهم در بر دارد، که در واقع منطبق است بر قوانین اول و دوم کپلر در مورد حرکت سیارات منظومه شمسی به دور خورشید. یادآوری می‌کنیم که نیروی گرانش خورشید بر روی هر یک از سیارات نیروی مرکزی و عکس مجذوری است. حال به بیان این دو نتیجه می‌پردازیم

الف - حرکت ناشی از نیروی مرکزی به صفحه‌ای محدود است که بر بردار تکانه زاویه‌ای (ثابت) $\vec{l}$ عمود است.

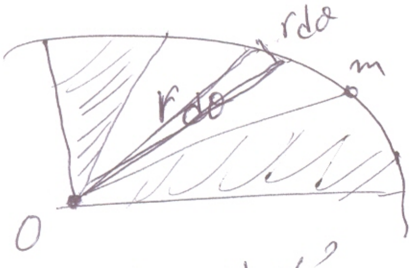


شکل ۲-۲

مبدأ مختصات را مطابق آنچه گفته شد مرکز نیرو می‌گیریم و فرض می‌کنیم در لحظه $t=t_0$ بردارهای مکان و سرعت ذره به ترتیب $\vec{r}_0$ و $\vec{v}_0$ باشد. بنا به تعریف تکانه زاویه‌ای برای لحظه $t=t_0$ چنین است:

$$\vec{\ell} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0$$

اگر صفحه‌ای که از $\vec{r}_0$ و $\vec{v}_0$ ساخته می‌شود مطابق شکل (۲-۲۰) صفحه S باشد، بردار $\vec{\ell}$ بر این صفحه عمود است. نشان می‌دهیم صفحه S صفحه حرکت است. فرض کنیم بعد از زمان کوچک Δt بردار مکان $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \Delta t$ باشد. روشن است که بردار $\vec{r}_1$ کماکان در صفحه S است. حال اگر تغییر سرعت ذره $\Delta\vec{v}$ مؤلفه‌ای عمود بر صفحه S داشته باشد آنگاه بردار $v_1 = v_0 + \Delta v$ نیز مؤلفه‌ای عمود بر صفحه S خواهد داشت. در این صورت تکانه زاویه‌ای لحظه $t_1 = t_0 + \Delta t$ مؤلفه‌ای در صفحه S خواهد داشت. چنین امری مغایر ثابت بودن بردار تکانه زاویه‌ای است. (با استدلال دیگری نیز می‌توان گفت بردار تغییر سرعت $\Delta\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}\Delta t$ به دلیل مرکزی بودن نیروی $\vec{F}$ در صفحه S است). به این ترتیب بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{v}_1$ نیز در صفحه S واقع هستند. اگر به همین ترتیب حرکت را در بازه‌های کوچک زمانی تعقیب کنیم بردار مکان ذره همواره در صفحه S است و ذره از این صفحه خارج نمی‌شود.



شکل (۲-۲۱)

ب - نتیجه دوم آن است که آهنگ جاروب شدن سطح توسط شعاع حامل جسم در صفحه حرکت ثابت است. شعاع حامل خطی است که جسم را به مرکز نیرو وصل می‌کند. بنابراین نتیجه سطح جاروب شده توسط شعاع حامل در بازه‌های زمانی مساوی، یکسان است. در شکل (۲-۲۱) این موضوع برای دو بازه زمانی Δt مختلف با سطوح هاشور زده نشان داده شده است. ما برای اثبات این نتیجه از مختصات قطبی در صفحه حرکت استفاده می‌کنیم.

داریم

$$\vec{l} = m\vec{r}\times\vec{v} = m(r\hat{e}_r)\times(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)$$

$$= mr^2\dot{\theta}\,\hat{e}_z \qquad (۱۴۸-۴)$$

که در آن $\hat{e}_z=\hat{e}_r\times\hat{e}_\theta$ بردار یکه عمود بر صفحه حرکت و در راستای $\vec{l}$ است.

بنابراین از ثابت بودن تکانه زاویه‌ای نتیجه می‌شود

$$l = mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \qquad (۱۴۹-۴)$$

حال ببینیم آهنگ جاروب شده توسط شعاع حامل چیست. در شکل (۲۱-۴) سطح جاروب شده در بازه بینهایت کوچک dt به شکل مثلثی که قاعده آن $r(t)$ و ارتفاع آن $rd\theta$ است نشان داده شده بنابراین $ds=\frac{1}{2}r^2d\theta$ و داریم

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{2m} = \text{ثابت} \qquad (۱۵۰-۴)$$

۴-۱۱- روش اختلال

کلمه اختلال در مفهوم معمولی و روزمره به معنای آشفتگی و درهم ریختگی است، اما در فیزیک ما از آن مفهوم دیگری را مراد می‌کنیم. چنانکه گفتیم هر نظریه دینامیکی و از آن جمله مکانیک نیوتنی شامل دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل است که با توجه به شرایط معین اولیه باید برای متغیرهای دینامیکی حل شود. اما مشکل اینجاست که در حالت کلی نمی‌توان حل‌های تحلیلی و تمیزی برای هر دسته‌ای از معادلات به دست آورد. معمولاً در همه نظریه‌های دینامیکی تعداد کمی مسئله وجود دارد که برای آنها حل تحلیلی و جمع و جور می‌توان ارائه کرد. اما در کنار این مسایل محدود می‌توان یک دسته نسبتاً بزرگ از مسایل را یافت که تفاوت آنها با مسئله دارای حل خوب ناچیز است. در فیزیک به این تفاوتهای کوچک اختلال می‌گوییم.

اجازه دهید به مورد خاص مکانیک نیوتنی که فعلاً بیشتر با آن درگیر هستیم بپردازیم. البته تاکید می کنیم که روش اختلال کلی است و همان ایده را می شود با تغییر در جزئیات برای هر نظریه دینامیکی به کار برد. فرض کنید به ازای نیروهای مشخصی که آنها را با $\vec{F}_i$ نشان می دهیم حل تحلیلی و دقیقی برای مختصات تعمیم یافته یک مسئله معین داشته باشیم و آنها را با $q_n(t)$ نشان دهیم. نیروهای $\vec{F}_i$ ممکن است هر تابع معینی از مختصات، سرعتها و سایر پارامترهای دستگاه و محیط باشند. حال فرض کنید که برای همان دستگاه نیروها $F_i' = F_i + \alpha G_i$ باشند که در آن α پارامتری کوچک و بدون بعد است. به جملات αG_i که به نیروهای اولیه اضافه شده اند اختلال می گوییم. انتظار طبیعی ما این است که با وجود اختلال کوچک αG_i حل مسئله نسبت به حالت بدون اختلال ($\alpha = 0$) چندان متفاوت نباشد. به عبارت دیگر حل مسئله چیزی شبیه $q_n'(t) = q_n(t) + \alpha f(t)$ باشد. حال حل مسئله دارای اختلال (و یا مختل شده) را در معادلات حرکت مختل شده قرار می دهیم و کلیه معادلات را تا مرتبه مورد نظر تقریب نسبت به α بسط می دهیم. روشن است که در رتبه صفرم حل $q_n(t)$ با نیروهای $\vec{F}_i$ معادلات را ارضاء می کند. اگر معادلات را تا مرتبه اول نسبت به α نگه داریم جواب اختلال مرتبه اول به دست می آید، تا مرتبه دوم، اختلال مرتبه دوم، الی آخر. معمولاً در عمل این کار را به طور مرحله ای و مرتبه به مرتبه انجام می دهیم. یعنی جواب اختلال مرتبه اول را در معادله قرار می دهیم و نتیجه را برای مرتبه دوم به دست می آوریم و به همین

ترتیب تا هر مرحله دلخواه پیش می‌رویم. به این کار نیز "محاسبه گام به گام" می‌گوییم.

نوع دیگری از مسائل که به روش اختلال حل می‌شود به این نحو است که برای یک دسته از معادلات حرکت که قادر نیستیم کلی‌ترین حل آنها را به دست آوریم، ابتدا یک حل مخصوص که حدس زدن آن آسان است را برای معادلات در نظر می‌گیریم. فرض کنیم چنین حلی برای معادلات $q_n(t)$ باشد. سپس فرض می‌کنیم حل دیگری که با این حل تفاوت اندکی دارد به صورت $q_n(t)+\xi_n(t)$ باشد که کمیتهای $\xi_n(t)$ و مشتق‌های آنها همگی در مقایسه با کمیتهای اصلی q_n بسیار کوچک هستند. حال حل‌های اختلالی فوق را در معادلات حرکت قرار می‌دهیم و جملات را تا مرتبه اول نسبت به کمیتهای کوچک ξ_n بسط می‌دهیم. معادلاتی که به این طریق برای ξ_n ها به دست می‌آید بسیار ساده‌تر از معادلات کلی هستند و حداقل حسن آنها این است که خطی اند، چرا که در به دست آوردن آنها از همه عبارتهای مجذوری و بالاتر چشم پوشیده‌ایم.

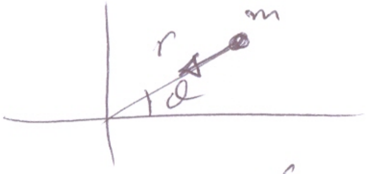
حال می‌توانیم معادلات ξ_n ها را با شرایط اولیه معین مسئله حل کنیم. و نتیجه اختلال مرتبه اول نسبت به حل ساده $q_n(t)$ را حساب کرد. با بسط حل‌ها برای مراتب بعدی علی‌الاصول این امکان وجود دارد که تقریب‌های بعدی را نیز حساب کرد.

در فصل های آینده به فراخور موضوع بحث برای مسایل دینامیکی مختلف سعی خواهیم کرد نمونه هایی از کاربرد روش اختلال را ذکر کنیم. حال به یک مثال در این مورد دقت کنید.

مثال ـ معادله حرکت یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد را به روش اختلال حل کنید.

از بحثی که در بخش (۲-۱۰) داشتیم آموختید که برای نیروی مرکزی حرکت ~~[illegible]~~ در صفحه انجام می گیرد. نیروی $\vec{F}=-k\vec{r}$ برای نوسانگر هماهنگ همسانگرد نیز یک نیروی مرکزی است. فرض کنید صفحه (xy) با مختصات قطبی (r,θ) صفحه حرکت باشد. (شکل ۲-۴۲)

معادلات حرکت در مختصات قطبی چنین است



شکل (۲-۴۲)

$$\begin{cases} F_r = m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = -kr \\ F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases} \qquad (۲-۱۵۱)$$

معادلات حرکت (۲-۱۵۱) حل تحلیلی و دقیق دارند. اما در اینجا ها می خواهیم این موضوع را نادیده بگیریم و آنها را به روش اختلال حل کنیم.

اگر معادلات (۲-۱۵۱) را به شکل ساده شده زیر بیان کنیم:

$$\begin{cases} \ddot{r}-r\dot{\theta}^2 = -\omega^2 r \\ 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \qquad (۲-۱۵۲)$$

که در آن $\omega^2 = k/m$ آنگاه

یک حل ساده این معادلات حرکت دایره ای با مشخصات زیر است

$$r = R = \text{ثابت}$$
$$\dot{\theta} = \omega = \text{ثابت} \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0 \qquad (۲-۱۵۳)$$

به سهولت می توان دید که حل فوق معادلات (۲-۱۵۱) را برآورده می کند.

~~[illegible]~~

اگر طرفین معادله دوم (۲-۱۵۲) را در r ضرب کنیم، به دست می‌آید

$$2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\ddot{\theta}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0 \Rightarrow r^2\dot{\theta}=\text{ثابت} \qquad (۲-۱۵۴)$$

ثابت به دست آمده متناسب با ~~...~~ اندازه حرکت زاویه‌ای است که ثابت بودن آن را در بخش (۲-۱۰) نشان دادیم. بنابراین

$$l=mr^2\dot{\theta}=\text{ثابت} \qquad (۲-۱۵۵)$$

اندازهٔ ثابت در رابطه (۲-۱۵۵) را از حل خاص (۲-۱۵۴) به صورت زیر می‌توان نوشت

$$l=mR^2\omega \qquad (۲-۱۵۶)$$

حال فرض کنیم حل دایره‌ای (۲-۱۵۳) به مقدار بسیار اندکی مختل شود. حل مختل شده را به صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم

$$r=R+\rho(t) \qquad \rho\ll R \qquad (۲-۱۵۷)$$
$$\dot{\theta}=\omega+\eta(t) \qquad \eta\ll\omega$$

اگر حل مختل شده را در رابطه (۲-۱۵۵) قرار دهیم داریم

$$m(R+\rho)^2(\omega+\eta)=mR^2\omega$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{\rho}{R}\right)^2\left(1+\frac{\eta}{\omega}\right)=1 \qquad (۲-۱۵۸)$$

با توجه به آنکه $\rho/R\lll 1$ و $\eta/\omega\lll 1$، سمت چپ رابطه (۲-۱۵۸) را می‌توان بسط داد، حاصل چنین است

$$1+\frac{2\rho}{R}+\eta/\omega=1 \Rightarrow \eta/\omega=-2\rho/R \qquad (۲-۱۵۹)$$

حال این بار حل مختل شده (۲-۱۵۷) را در معادله اول (۲-۱۵۲) قرار می‌دهیم با توجه به ثابت بودن R، مشتق‌گیری از r فقط شامل ρ است و داریم

$$\ddot{\xi} - (R+\xi)(\omega+\eta)^2 = -\omega^2(R+\xi) \qquad (۱۵۰-۴)$$

$$\Rightarrow \ddot{\xi} - R\omega^2\left(1+\frac{\xi}{R}\right)\left(1+\frac{\eta}{\omega}\right)^2 = -R\omega^2\left(1+\frac{\xi}{R}\right) \qquad (۱۵۱-۴)$$

با بسط دادن جملات تا مرتبه اول نسبت به ξ/R و η/ω، عبارتهای مربوط به حل مرتبه صفرم، یعنی $-R\omega^2$ از طرفین حذف می‌شود. آنچه باقی می‌ماند عبارتهای خطی نسبت به اختلال‌های ξ و η است. (این نکته یک روش اطمینان از درستی محاسبه است. باید جملات مرتبه صفرم حذف شوند و آنچه باقی می‌ماند نسبت به اختلال خطی باشد). نتیجه چنین است

$$\ddot{\xi} - R\omega^2\left(\frac{\xi}{R}+\frac{2\eta}{\omega}\right) = -R\omega^2\frac{\xi}{R} \qquad (۱۵۱-۴)$$

با استفاده از رابطه (۴-۱۴۹) به دست می‌آید

$$\ddot{\xi} + 4\omega^2\xi = 0 \qquad (۱۵۲-۴)$$

به این ترتیب به نتیجه نسبتاً ساده‌ای برای اختلال اضافه شده به حرکت دایره‌ای به دست آوردیم. معادله (۴-۱۵۲) معادله حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای با بسامد (2ω) است. حل معادله (۴-۱۵۲) به صورت زیر است

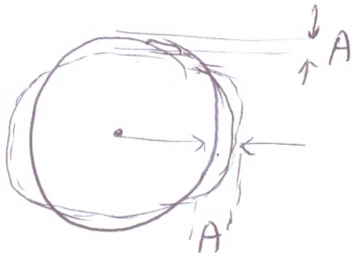
$$\xi(t) = A\sin(2\omega t+\varphi)$$

که A دامنه نوسان اختلال است. بنابراین مختصه r به شکل زیر با زمان عوض می‌شود

$$r(t) = R + A\sin(2\omega t+\varphi)$$

بنابراین مسیر حرکت دایره‌ای است که در هر دور حرکت دو بار شعاع آن کوچک و بزرگ می‌شود. شکل (۴-۲۲) تصویری از این حرکت را نشان می‌دهد.

تجزیه و تحلیل دقیق این مسئله نشان می دهد
که حل معادلات (۳ - ۱۵۲) یک بیضی است
که مبدأ مختصات در مرکز آن قرار دارد.
نتیجه ای که از روش اختلال به دست می آید
کم و بیش خواص اصلی حرکت بیضی ذکر شده را
بیان می کند.



شکل (۳-۴۴)

گاهی به این شیوهٔ اختلالی حل مسئله خطی سازی نیز گفته می شود.
معادلات اصلی حرکت نسبت به متغیرهای r و θ یعنی معادلات (۳-۱۵۲)
خطی نیستند، اما معادلاتی که برای اختلال ها به دست آمد یعنی (۳-۱۴۹)
و (۳ - ۱۵۱) هر دو خطی هستند.