بیشینه مطلق خواهد بود. در این حال $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Big|_{0,0} < 0$ و $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\Big|_{0,0} < 0$ و

با انحراف از نقطه (0,0) پتانسیل از هر طرف کم می شود. در این حالت نیز شکل پربندهای پتانسیل ثابت مشابه شکل (۴-۱۴) است با این تفاوت که $V_1 > V_2 > V_3 \ldots$. در این حالت با دور شدن از نقطه تعادل حل معادلات حرکت به صورت $e^{\pm\beta t}$ است که به طور کلی دستگاه را از نقطه تعادل دورتر و دورتر می کند.

حالتی که یکی از ضرایب K_1 یا K_2 در رابطه (۴-۶۸) منفی و دیگری مثبت باشد به نقطه تعادل (0,0) یک نقطه زینی گفته می شود. شکل تابع $V(x,y)$ برحسب x,y درست مشابه زین اسب است. این رویه رویه ای است که در امتداد بدن اسب دارای کمینه و در امتداد عمود بر بدن اسب دارای بیشینه است. اگر به عنوان مثال $K_1 > 0$ و $K_2 < 0$ نقطه (0,0) در راستای x نقطه کمینه و در راستای y نقطه بیشینه است. در این وضعیت اگر دستگاه در راستای x منحرف شود نوسان می کند و اگر در راستای y منحرف شود از نقطه تعادل دورتر و دورتر خواهد شد. در مجموع یک نقطه زینی یک نقطه تعادل ناپایدار است چون به ازای برخی از انحراف ها دستگاه به نقطه تعادل برنمی گردد.

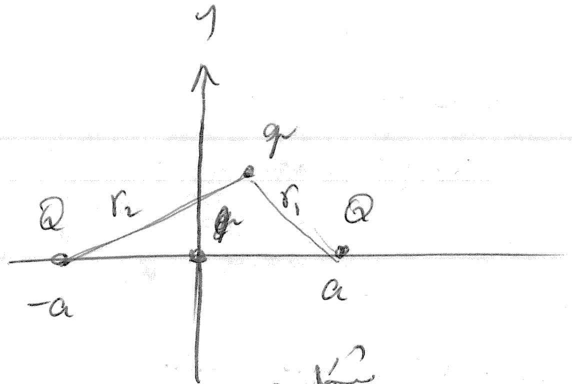
در مجموع، نقطه یک کمینه مطلق نقطه تعادل پایدار به حساب می رود.

در سه بعد اگر $V(x,y,z)$ را حول نقطه تعادل بسط دهیم و با چرخش مناسب دستگاه مختصات جملات ضربدری را حذف کنیم، در این صورت نقطه (x_0,y_0,z_0) نقطه تعادل پایدار است به شرط آنکه

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_0,y_0,z_0} = \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{x_0,y_0,z_0} = \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{x_0,y_0,z_0} = 0 \qquad (۶۹-۴)$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_0,y_0,z_0} > 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{x_0,y_0,z_0} > 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_{x_0,y_0,z_0} > 0$$

لازم به تاکید است که بدون حذف جملات ضربدری نباید به علامت مشتق های جزئی توجه کرد.



شکل (۱۸-۴)

مثال - دو بار نقطه ای Q در نقاط $(-a,0)$ و $(a,0)$ قرار دارند و بار همنام q می تواند در نقاط مختلف صفحه xy جا به جا شود. وضعیت فیزیکی نقطه تعادل دستگاه را از لحاظ پایدار ناپایدار یا زینی بودن) بررسی کنید.

با یک بررسی کیفی اولیه و رسم نیروهای توان دید که اگر بار q فقط روی محور x جا به جا شود مبدأ مختصات برای آن نقطه تعادل پایدار است، چرا که به دلیل همنام بودن q و Q اگر q به هر طرف منحرف شود دافعه بار نزدیک تر بر نیروی دافعه بار دورتر غلبه کرده و جسم را به مبدأ برمی گرداند. از طرف دیگر اگر بار q روی محور y جا به جا شود نیروی برآیند ناشی از دو بار در راستای y و ~~در جهت دور از مبدأ~~ در جهتی است که جسم را از مبدأ دور کند. بنابراین نقطه $(0,0)$ نقطه تعادل زینی است.

یعنی در راستای x نقطه تعادل پایدار و در راستای y ناپایدار است.

حال سعی می‌کنیم این نتایج را به طور کمی و با بررسی انرژی پتانسیل دستگاه بیان کنیم. با توجه به شکل (۱۵-۴) انرژی پتانسیل دستگاه وقتی بار q در نقطه دلخواه (x,y) قرار گیرد به صورت زیر است

$$V(x,y) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \qquad (۷۰-۴)$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left[\left((x-a)^2+y^2\right)^{-1/2}+\left((x+a)^2+y^2\right)^{-1/2}\right]$$

مشتقات جزئی V را که همان مؤلفه‌های نیروی وارد به ذره (با علامت منفی) هستند چنین هستند

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left[(x-a)\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-3/2}+(x+a)\left[(x+a)^2+y^2\right]^{-3/2}\right]$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left[y\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-3/2}+y\left[(x+a)^2+y^2\right]^{-3/2}\right] \qquad (۷۱-۴)$$

در مبدأ مختصات داریم

$$F_x(0,0) = -\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{0,0} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(-a\,a^{-3}+a\,a^{-3}\right) = 0 \qquad (۷۲-۴)$$

$$F_y(0,0) = -\frac{\partial V}{\partial y}\Big|_{0,0} = 0$$

برای تعیین نوع نقطه تعادل باید مشتق‌های دوم V را حساب کنیم

$$\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0}\left[2(x-a)^2\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-5/2}+2(x+a)^2\left[(x+a)^2+y^2\right]^{-5/2}\right]}$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0}\left[2y^2\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-5/2}+2y^2\left[(x+a)^2+y^2\right]^{-5/2}\right]}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left[2(x-a)^2 - y^2\right]\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-5/2} + (a \to -a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left[2y^2 - (x-a)^2\right]\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-5/2} + (a \to -a) \qquad (۷۳-۴)$$

در روابط (۴-۷۳) منظور از عبارت $(a \to -a)$ آن است که عبارت نخست با تبدیل a به $(-a)$ تکرار شود. این طرز نوشتن نه فقط نوشته را خلاصه تر می کند بلکه در بسیاری موارد در روند محاسبات راهگشا است. مثلاً صفر شدن F_x و F_y در نقطه $(0,0)$ با نگاهی به دو عبارت (۴-۷۱) قابل مشاهده است، به این صورت که در نقطه $(0,0)$ عبارت داخل کروشه در جمله اول و دوم یکی است ولی ~~ضریب~~ ضریب آنها در یک علامت منفی تفاوت دارد. در روابط (۴-۷۳) عکس این اتفاق می افتد و در نقطه $(0,0)$ با تبدیل $(a \to -a)$ عبارت دوم تکرار عبارت اول است. در مجموع از روابط (۴-۷۳) داریم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{0,0} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(2a^2 a^{-5}\right)\times 2 = \frac{4qQ}{4\pi\epsilon_0 a^3} > 0 \qquad (۷۴-۴)$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{0,0} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(-a^2 a^{-5}\right)\times 2 = -\frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 a^3} < 0$$

برای قضاوت قطعی در مورد نقطه تعادل باید مشتقات ضربدری مرتبه دوم پتانسیل را نیز حساب کنیم

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|_{0,0} = -3(x-a)y\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-5/2}\Big|_{0,0} = 0 \qquad (۷۵-۴)$$

اگر نتایج (۴-۷۴) و (۴-۷۵) را در بسط تیلور (۴-۶۰) قرار دهیم، با توجه

با آن که $V(0,0)=\frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 a}$، داریم

$$V(x,y) \simeq \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{k}{2}\right)y^2 \qquad (۴-۷۵)$$

که در آن $k=\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 a^3}$. با توجه به صفر بودن مشتق ضربدری

مثبت بودن ضریب x^2 در رابطه (۴-۷۵) نشان می‌دهد که نقطه تعادل (0,0) در راستای x ~~نقطه تعادل پایدار~~ کمینه پتانسیل است و منفی بودن ضریب y^2 نیز نشان می‌دهد که نقطه مذکور در راستای y بیشینه پتانسیل است. بنابراین (0,0) برای حرکت در راستای x نقطه تعادل پایدار و برای حرکت در راستای y نقطه تعادل ناپایدار است و در مجموع یک نقطه زینی تعادل برای پتانسیل (۴-۷۰) به حساب می‌رود.

اگر به نحوی از حرکت در جهت y ممانعت کنیم و بار q فقط مجاز به جابجایی در جهت x باشد بسامد نوسانهای کوچک در راستای x از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 a^3 m}} \qquad (۴-۷۷)$$

که در آن m جرم بار نقطه‌ای q است. اگر بارهای q و Q ناهمنام باشند، بدون تکرار محاسبه از نتایج (۴-۷۴) و (۴-۷۵) می‌توان دید که در این حالت ضریب جمله x^2 منفی و ضریب جمله y^2 مثبت است. بنابراین بار q در راستای x دارای تعادل ناپایدار و در راستای y پایدار است.

نتیجه (۴-۷۵) را به طریق دیگری نیز می‌توان به دست آورد که به لحاظ معرفی یک روش دیگر برای حل مسئله می‌تواند قابل توجه باشد. در این

روش به جای محاسبه مشتق های پتانسیل (۷۰-٤) مستقیماً سعی می کنیم با استفاده از روشهای تقریبی بسط $V(x,y)$ حول نقطه $(0,0)$ را به دست آوریم. به عبارت دیگر برای مقادیر کوچک x/a و y/a بسط $V(x,y)$ را تا مرتبه دوم عبارتهای مذکور حساب می کنیم. برای این کار پتانسیل (۷۰-٤) را به شکل زیر می نویسیم

$$V(x,y) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left[\left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{-1/2} + (a\to -a)\right] \quad (۷۸-٤)$$

با استفاده از بسط تقریبی زیر (به ازای $|\epsilon|<1$)

$$(1+\epsilon)^{-1/2} = 1-\frac{1}{2}\epsilon+\frac{3}{8}\epsilon^2 \quad (۷۹-٤)$$

داریم

$$V(x,y) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left[1-\frac{1}{2}\left(-\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)+\frac{3}{8}\left(-\frac{2x}{a}+\cdots\right)^2 + (a\to -a)\right]$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left[1+\frac{x}{a}+\frac{2x^2-y^2}{2a^2}+(a\to -a)\right]$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left[2+2\times\frac{2x^2-y^2}{2a^2}\right]$$

$$= \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 a}+\frac{1}{2}\left(\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 a^3}\right)x^2-\frac{1}{2}\left(\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 a^3}\right)y^2 \quad (۸۰-٤)$$

دقت کنید که در خط اول از محاسبه فوق در جمله $\frac{3}{8}\epsilon^2$ چون محاسبه فقط تا مرتبه دوم x^2/a^2 و y^2/a^2 مد نظر است فقط جمله $\left(-\frac{2x}{a}\right)$ را وارد کرده ایم. نتیجه (۸۰-٤) همان نتیجه (۷۶-٤) است که به طور مستقیم تری به دست آمد. در بعضی از مسایل ممکن است کار محاسبهٔ مشتق ها آسان تر باشد و در بعضی از مسایل محاسبه مستقیم بسط تقریبی $V(x,y)$ برحسب

$(x-x_0)$ و $(y-y_0)$ تا مرتبه دوم ممکن است راحت‌تر باشد. ضروری است دانشجو به هر دو روش مسلط باشد. دقت کنید که اگر جملات خطی نسبت به $(x-x_0)$ یا $(y-y_0)$ در عبارت $V(x,y)$ باقی بماند حاکی از آن است که نقطه (x_0,y_0) نقطه تعادل نبوده است. بنابراین می‌توان گفت که اگر بسط تیلور تابع انرژی پتانسیل حول نقطه خاص فاقد جملات خطی باشد آن نقطه، نقطه تعادل دستگاه است.

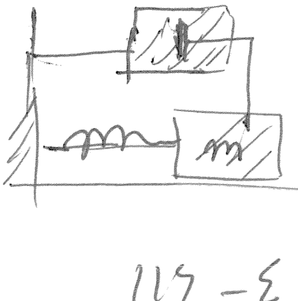
در فیزیک ماده چگال می‌بینیم که در بلورها اتمها در یک آرایه منظم قرار گرفته‌اند و حول محل استقرار خود نوسان می‌کنند. در حقیقت برهم‌کنش الکترومغناطیسی بین اتمها چنان است که هر اتم از طرف سایر اتمها پتانسیلی را احساس می‌کند که نقطه استقرار اتم، نقطه تعادل پایدار آن پتانسیل است. با دانستن بسامد نوسان اتم‌ها در جهت‌های مختلف می‌توانیم اطلاعاتی در مورد مشتق‌های دوم آن پتانسیل نسبت به مختصات x، y و z به دست آوریم. به این ترتیب می‌توانیم برای انرژی پتانسیل برهم‌کنش مؤثر مجموعه اتمهای یک بلور بر روی هر اتم مدل‌های نظری ارائه کنیم و آن را با اطلاعاتی که در مورد بسامد نوسان اتمها داریم مقایسه کنیم.

نوسانگر هماهنگ میرا

در این بخش می‌خواهیم علاوه بر نیروی بازگرداننده فنر نیروی اصطکاک نیز در نظر بگیریم. اگر فرض کنیم نوسانگر شکل (۴-۱) روی یک سطح افقی دارای اصطکاک حرکت کند در این صورت نیروی

با یک نیروی اصطکاک که مقدار آن ثابت (و برابر $\mu_k mg$) است سر و کار خواهیم داشت. اما چون جهت نیروی اصطکاک در هر بخشی از حرکت خلاف جهت سرعت است، مرتب تغییر جهت می دهد و با یک رابطهٔ سادهٔ ریاضی قابل بیان نیست. برای حل چنین مسئله ای باید در هر حرکت رفت یا برگشت نیروی بازگرداننده را با نیروی ثابت اصطکاک جمع کرد و پس از پایان حرکت و سکون لحظه ای ذره مجدداً شرایط اولیه مسئله را برای حرکت بعدی لحاظ کرد. چنین مسئله ای هر چند امکان وقوع دارد اما به لحاظ نتایج ریاضی حرکت و روشهای حل معادله جذابیتی ندارد و قابل تعمیم به دستگاههای متنوع تر یکی نیست.

نیروی میرایی که برای ما جالب است و نتایج ریاضی آن چنانکه خواهیم دید بیشتر قابل بحث است نیروی میرایی خلاف سرعت و متناسب با مقدار سرعت است، یعنی نیروی میرایی که با عبارت ریاضی $F=-bv$ بیان شود. در شکل (۴-۱۶) دستگاهی به نوسانگر شکل (۴-۱) ضمیمه شده است که به آن "میراگر" نوسان گفته می شود و می توان نیروی میرایی ($-bv$) را ناشی از آن گرفت. در این دستگاه یک صفحه کوچک متصل به نوسانگر در داخل ظرف سیالی که به دیواره ثابت متصل است حرکت می کند. اگر سرعت حرکت نوسانگر بزرگ نباشد نیروی مقاومت سیال را تقریباً می توان متناسب با سرعت گرفت.



(۴-۱۶)

اگر نقطه تعادل را مبدأ مختصات بگیریم،
~~فاصله~~ نیروی برآیند وارد به نوسانگر $(-kx-bv)$ خواهد بود و
قانون دوم نیوتن به رابطه زیر منجر می‌شود

$$F = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \qquad (۸۱-۴)$$

که با ~~معرفی~~ نامگذاری‌های زیر

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{b}{2m} \qquad (۸۲-۴)$$

به صورت زیر درمی‌آید

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (۸۳-۴)$$

کمیت‌های ω_0 و γ هر دو بعد T^{-1} دارند و به ترتیب بسامد طبیعی
نوسانگر و ضریب میرایی نام دارند.
معادله (۸۳-۴) یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ است که به آن
معادله نوسانگرهای کند میرا می‌گوییم. این معادله از نوع معادلات
دیفرانسیل ساده با ضرایب ثابت است که حل‌هایی از نوع $e^{\alpha t}$ دارد.
اگر حل $x = e^{\alpha t}$ را در معادله (۸۳-۴) قرار دهیم به دست می‌آید

$$(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2)e^{\alpha t} = 0$$

چون هیچگاه در t متناهی کمیت $e^{\alpha t}$ صفر نمی‌شود، نتیجه می‌گیریم

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad (۸۴-۴)$$

معادله درجه دوم (۸۴-۴) برای α دارای دو حل زیر است

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$
$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad (۸۵-۴)$$

بسته به علامت عبارت $\gamma^2 - \omega_0^2$ سه حالت کند میرا، میرای بحرانی و

کند میرا خواهیم داشت که در زیر به بررسی آنها می پردازیم

الف - حالت تند میرا - در این حالت $\gamma^2-\omega_0^2>0$ و جوابهای α_1 و α_2 در معادله (۴-۸۵) هر دو حقیقی هستند. کلی ترین جواب معادله دیفرانسیل خطی (۴-۸۴) ترکیبی از دو جواب $e^{\alpha_1 t}$ و $e^{\alpha_2 t}$ است:

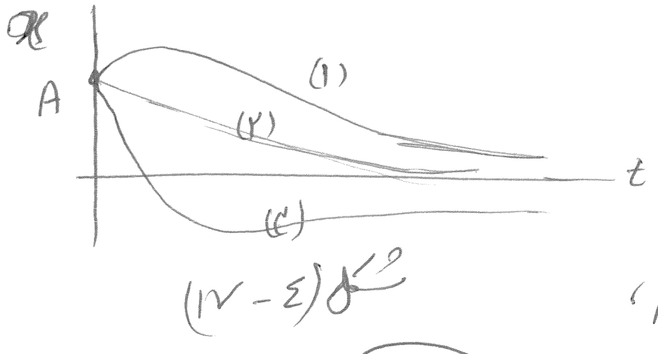
$$x(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}$$

$$=e^{-\gamma t}\left[A_1e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t}+A_2e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t}\right] \qquad (۴-۸۶)$$

با توجه به آنکه $\gamma>\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ هر دو ثابت α_1 و α_2 منفی هستند و هر دو در طول زمان میرا می شوند. بنابراین به ازای $t\to\infty$ هر دو به صفر میل می کنند. به جای جواب کلی (۴-۸۶) می توان جواب کلی زیر را نیز در نظر گرفت.

$$x(t)=e^{-\gamma t}\left[B_1\,ch\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t\right)+B_2\,sh\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t\right)\right] \qquad (۴-۸۷)$$

در حقیقت توابع $ch\beta t$ و $sh\beta t$ ترکیبی از $e^{\beta t}$ و $e^{-\beta t}$ هستند و بالعکس. فرض کنیم در لحظه $t=0$ جسم m در شکل (۴-۱۹) به اندازه $x(0)=A$ از نقطه تعادل منحرف شده باشد. بدون نقض کلیت مسئله می توانیم فرض کنیم $A>0$. شکل (۴-۱۷) نمودار x برحسب t در سه حالت مختلف نشان می دهد. اگر $\dot{x}(0)=v$ سرعت اولیه جسم m باشد،



شکل (۴-۱۷)

برای v_0 جسم اندکی به سمت راست (از شکل ۴-۱۶) منحرف می‌شود

و سپس به نقطه تعادل برمی‌گردد و در زمان طولانی و به آرامی به نقطه تعادل
مطابق نمودار (۱)

می‌رسد. اگر v_0، بسته به کوچکی یا بزرگی اندازه v نمودار x-t

ممکن است به شکل نمودار (۲) یا (۳) ~~...~~ در شکل (۴-۱۷) باشد.

در مسئله ... این فصل موارد مذکور و تعیین سرعت حدی که تمیز دهنده

اثبات
حالت (۲) و (۳) ~~...~~ از یکدیگر باشد از خواننده خواسته شده است.

فنرهای ترام با میرایی در کنترل دامنه حرکت و شتاب بسته شدن درهای

اماکن عمومی به کار گرفته می‌شود. اگر به جای فنر دارای میرایی از فنر

ساده برای بسته شدن در استفاده شود، به هنگام بسته شدن، در

به شدت با چارچوب برخورد خواهد کرد. عامل میرایی حرکت بسته

شدن را به آرامی و ~~در~~ در مدت زیاد به انجام می‌رساند.

ب- میرای بحرانی- در این حالت $\omega_0^2-\gamma^2=0$. در این حال از

رابطه (۴-۸۵) به جای دو جواب متمایز فقط یک جواب به صورت $e^{-\gamma t}$

به دست می‌آید. برای یافتن جواب دیگر توجه می‌کنیم که در این حال معادله

دیفرانسیل (۴-۸۳) به صورت

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\gamma^2 x=0 \qquad (۴-۸۸)$$

در می‌آید که آن را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)x=0 \qquad (۴-۸۹)$$

اگر فرض کنیم ~~...~~ $u(t)=\left(\frac{d}{dt}+\gamma\right)x(t)$ از معادله (۴-۸۹) داریم

$$\dot u + \gamma u = 0 \Rightarrow u(t) = Ae^{-\gamma t}$$

بنابراین از رابطه $u(t)$ و $x(t)$ می توان محاسبه زیر را انجام داد

$$\dot x + \gamma x = u = Ae^{-\gamma t} \Rightarrow \dot x e^{\gamma t} + \gamma x e^{\gamma t} = A$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(xe^{\gamma t}) = A \Rightarrow xe^{\gamma t} = At + B$$

$$\Rightarrow x(t) = Ate^{-\gamma t} + Be^{-\gamma t} \qquad (۹۰-۴)$$

این محاسبه نشان می دهد که در حالت میرای بحرانی دو جواب مستقل $e^{-\gamma t}$ و $te^{-\gamma t}$ برای معادله دیفرانسیل (۴-۸۸) وجود دارد و حل کلی (۴-۹۰) ترکیبی خطی از این دو حل است.

در حالت میرای بحرانی نیز می توان نشان داد که اگر در لحظه $t=0$ انحراف نوسانگر $x(0)=A$ را مثبت بگیریم شکل کیفی نمودار $x-t$ کم و بیش مثل به شکل (۴-۱۷) است اما مقادیر کمی مربوط به بیشینهٔ انحراف و سرعت حدی تمیز دهنده نمودارهای (۲) و (۳) متفاوت است و در عین حال آهنگ میرا شدن انحراف نوسانگر از حالت تعادل نیز شدیدتر است.

ج- کند میرا - در این حالت $\omega_0^2-\gamma^2 > 0$ یعنی زیر رادیکال در جوابهای (۴-۸۵) منفی است. در چارچوب اعداد حقیقی وقتی عبارت $\Delta = b^2-4ac$ در معادله درجه دوم $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ منفی باشد می گوییم معادله جواب ندارد. اما در چارچوب اعداد مختلط منفی شدن Δ مانع دستیابی به جواب نیست. در مورد معادله مورد نظر ما یعنی معادله

(۴-۸۴) اگر فرض کنیم

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \qquad (۴-۹۱)$$

برای حالت کند میرا $\omega_1^2 > 0$ و در چارچوب اعداد مختلط دو حل $\alpha_1 = -\gamma + i\omega_1$

و $\alpha_2 = -\gamma - i\omega_1$ را خواهیم داشت. به یاد داشته باشیم که ما به دنبال حل

معادله حرکت (۴-۸۲) برای کمیت حقیقی $x(t)$ در حالت کند میرا هستیم

اما نتیجهٔ اخیر نشان می دهد که ما فقط می توانیم حل های مختلط برای معادله

~~مذکور~~ به کار داشته باشیم. در واقع ما به جای معادله (۴-۸۲) معادله مشابهی

برای کمیت مختلط $Z(t) = x(t) + iy(t)$ را حل کرده ایم و دو حل مستقل به

صورت $e^{(-\gamma + i\omega_1)t}$ و $e^{(-\gamma - i\omega_1)t}$ برای آن به دست آورده ایم. حل

کلی ترکیبی از این دو حل است که می توان آن را به صورت زیر نوشت

~~$Z(t) = A_1 e^{-\gamma - i}$~~

$$Z(t) = e^{-\gamma t}\left[A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}\right] \qquad (۴-۹۲)$$

در این جواب A_1 و A_2 دو عدد مختلط هستند. بنابراین حل (۴-۹۲)

شامل چهار ثابت اولیه برای متغیر مختلط $Z(t)$ است که دو ثابت مربوط

به قسمت حقیقی و دو ثابت هم مربوط به قسمت موهومی است. همانطور که

در بخش (۴-؟) دیدیم می توان A_1 و A_2 را چنان گرفت که عبارت

داخل کروشه در سمت راست رابطه (۴-۹۲) حقیقی و شامل دو ثابت

اختیاری باشد. با توجه به بحث مفصلی که برای نوسانگر هماهنگ بدون

میرایی داشتیم در اینجا نیز می توان به جای عبارت فوق از جمله حقیقی

$A\cos(\omega_1 t+\varphi)$ استفاده کرد که در واقع ترکیبی حقیقی از $e^{i\omega_1 t}$ و $e^{-i\omega_1 t}$ است

که شامل دو ثابت اختیاری A و φ می‌باشد. به این ترتیب کلی‌ترین

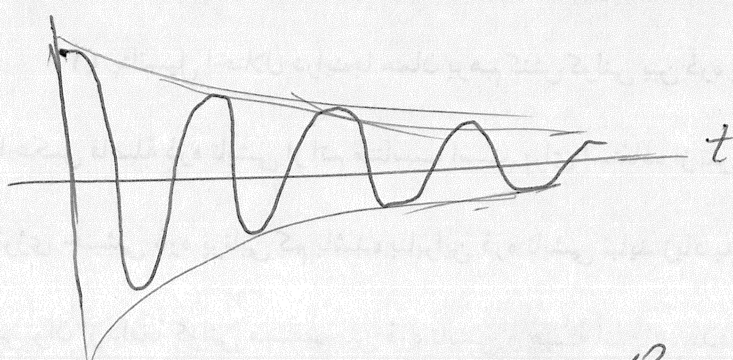
حل معادله نوسانگرهای هماهنگ در حالت کند میرا به صورت زیر است

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\varphi) \qquad (۹۳-۴)$$

که آن را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A_1\cos\omega_1 t + A_2\sin\omega_1 t) \qquad (۹۴-۴)$$

نمودار $x(t)$ بر حسب t به صورت شکل (۱۸-۴) است



شکل (۱۸-۴)

در این نمودار عبارت $Ae^{-\gamma t}$ (و قرینه آن نسبت به محور افقی) به صورت پوش منحنی نوسانی $\cos(\omega_1 t+\varphi)$ عمل می‌کند. مثل این است که دامنهٔ نوسان به جای مقدار ثابت A برای حرکت نوسانی ساده، مقدار متغیر $Ae^{-\gamma t}$ در نظر گرفته شده است. توجه کنید که وجود میرایی از بسامد طبیعی نوسان کاسته و ω_1 را جایگزین ω_0 کرده که از آن کوچکتر است.

- نوسانگر با میرایی کم

یک دستگاه فیزیکی جالب نوسانگر هماهنگ با میرایی کوچک است، که با

رابطهٔ $\omega_0 \gg \gamma$ بیان می‌شود. طبیعتاً جسم نوسانگری در حالت کند میرا قرار می‌گیرد. در این حالت از رابطه $\omega_1^2=\omega_0^2-\gamma^2$ می‌توان تقریب $\omega_0 \approx \omega_1$ را تا رتبه اول نسبت به کمیت کوچک γ/ω_0 به کار برد. در این حالت نمودار $x-t$ (شکل ۴-۱۸) به شکل سینوسی معمولی بسیار نزدیک است و پوشش $e^{-\gamma t}$ بسیار به عدد ۱ نزدیک است. در نتیجه تغییرات دامنه در هر دورهٔ نوسان بسیار اندک است. مثلاً اگر $\frac{\gamma}{\omega_0}$ از مرتبه 10^{-3} باشد معنایش آن است که در بازهٔ زمانی $\tau \approx \gamma^{-1}$ که بزرگی دامنه به طور محسوس کاهش می‌یابد نوسانگر در حدود هزار نوسان انجام داده است.

اجازه دهید انرژی نوسانگرهای کند میرا را بررسی کنیم. برای این کار باید انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل دستگاه را حساب کنیم و باهم جمع کنیم. ابتدا سرعت نوسانگر را با مشتق گیری از رابطه (۴-۹۴) حساب می‌کنیم:

$$\dot{x}(t)=Ae^{-\gamma t}\left[-\gamma \cos(\omega_1 t+\varphi)-\omega_1 \sin(\omega_1 t+\varphi)\right]$$

$$\simeq -A\omega_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t+\varphi) \qquad (۴-۹۵)$$

در اینجا به دلیل کوچکی γ در مقابل ω_1 از جمله اول در سطر اول (سمت راست) چشم پوشیده‌ایم و نیز در سطر دوم ω_0 را جایگزین ω_1 کرده‌ایم. حال انرژی نوسانگر چنین است

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$\simeq \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega_1 t+\varphi)+\frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_1 t+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t} \qquad (۴-۹۶)$$

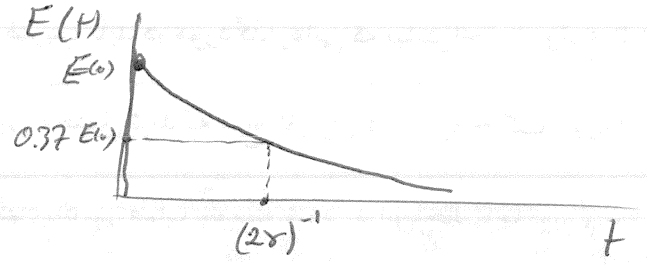
چنانکه دیده می‌شود انرژی دستگاه ثابت نیست و با زمان تغییر می‌کند. در شروع حرکت انرژی $E(0)=\frac{1}{2}kA^2$ است و با گذشت زمان به صورت زیر عوض می‌شود

$$E(t)=E(0)\,e^{-2\gamma t} \qquad (۹۷-۴)$$

که نمودار تغییرات زمانی آن مطابق شکل (۴-۱۹) است. پس از گذشت زمان $t_0=\frac{1}{2\gamma}$ داریم:

$$E\left(\frac{1}{2\gamma}\right)=E(0)\,e^{-1}$$

$$\simeq 0.37\,E(0) \qquad (۹۸-۴)$$



(شکل ۴-۱۹)

(دقت کنید که $\frac{1}{2\gamma}$ بعد زمان دارد.)

آهنگ میرا شدن انرژی با $e^{-2\gamma t}$ و آهنگ میرا شدن دامنه $e^{-\gamma t}$ است.

دامنه نوسان پس از زمان $\tau=\frac{1}{\gamma}$ به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه می‌رسد ولی انرژی نوسانگر در نصف این زمان یعنی در لحظه $\tau/2$ به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه خود می‌رسد.

به زمان τ "زمان مشخصه" نوسانگر میرا گفته می‌شود. نامساوی $\omega_0 \gg \gamma$ با نامساوی $\tau \gg T$ معادل است که $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ پریود نوسان طبیعی دستگاه است.

توجه داشته باشید که معمولاً ما از کمیت انرژی در مواردی استفاده می‌کردیم که این کمیت پایسته بود. در این مسئله به دلیل وجود نیروی میرایی $(-bv)$ پایستگی انرژی نداریم. اما با این وجود بررسی کمیت انرژی به معنای مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل دستگاه مفید است.

در استفاده‌های کاربردی دستگاه‌های نوسان کننده کمیت مفیدی معرفی

می‌کنیم که آن را عامل کیفیت یا عامل Q می‌گوییم. این عامل چنین تعریف می‌شود

$$Q = \frac{2\pi\,(\text{انرژی میانگین نوسانگر در هر پریود})}{\text{اتلاف انرژی در هر پریود نوسان}} \qquad (۴-۹۹)$$

این عامل به نوعی نشان دهنده میرایی دستگاه است، هر چه میرایی کمتر باشد نوسانگر عامل کیفیت بزرگتری دارد. معمولاً این عامل برای نوسانگرها با میرایی کم تعریف می‌شود. در این حالت انرژی میانگین کم و بیش همان $E(t)$ است که در رابطه (۴-۹۷) به دست آمد. در واقع تقریب‌هایی که در به دست آوردن این رابطه به کار بردیم اصولاً جملات نوسانی را حذف کرد و نیازی به میانگین‌گیری در یک پریود نیست (به مراحل رابطه ۴-۹۶ نگاه کنید). اما برای محاسبه مخرج رابطه (۴-۹۹) با توجه به کوچک بودن پریود نوسان در مقایسه با زمان تغییرات محسوس E داریم

$$\Delta E \simeq \left|\frac{dE}{dt}\right| T = \left|\frac{1}{2} k A^2 (-2\gamma) e^{-2\gamma t}\right| \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_0}\left(\frac{1}{2} k A^2\right)(2\gamma)\, e^{-2\gamma t} \qquad (۴-۱۰۰)$$

بنابراین عامل کیفیت برای یک نوسانگر چنین خواهد شد

$$Q = \frac{2\pi\left(\frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t}\right)}{\frac{2\pi}{\omega_0}\left(\frac{1}{2} k A^2 e^{-2\gamma t}\right)(2\gamma)} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \qquad (۴-۱۰۱)$$

چنانکه می‌بینیم عامل کیفیت بستگی به نسبت $\frac{\omega_0}{\gamma}$ دارد و هر چه نسبت بسامد طبیعی به ضریب میرایی بزرگتر باشد نوسانگر با کیفیت‌تر است. علت این نامگذاری آن است که اگر Q بزرگ باشد

به معنای آن است که به ازای انرژی معینی که به نوسانگر داده می‌شود
نوسانگر می‌تواند تعداد بیشتری نوسان انجام دهد. برای فنرهای معمولی

(قبل از میرا شدن)

عامل کیفیت در حدود ۱۰ تا ۱۵ است. برای دستگاههایی مثل یک دیاپازون
در حدود 10^4 است و برای بلورها مثل بلور کوارتز از مرتبه 10^5 است.
یعنی با یک ضربه به دیاپازون می‌توان در حدود ده هزار نوسان را
مشاهده کرد.

— نمودارهای فاز

در فصل های آینده خواهیم دید که برای هر دستگاهی با مختصه‌های تعمیم یافته
$q_1, \ldots q_n$ می‌توان n متغیر دیگر تکانه در نظر گرفت که آنها را $p_1, \ldots p_n$ می‌نامیم.
فضایی که از مجموعهٔ متغیرهای $q_1, \ldots q_n$ و $p_1, \ldots p_n$ ساخته می‌شود فضای
فاز نامیده می‌شود. حالت اولیه دستگاه با نقطه $q_{01}, \ldots q_{0n}$ و $p_{01} \ldots p_{0n}$
در فضای فاز نشان داده می‌شود. وضعیت فیزیکی دستگاه در هر لحظه t نیز
با نقطه معینی در فضای فاز داده می‌شود. به این ترتیب حرکت دستگاه با
مسیر نقطه معرف دستگاه در فضای فاز مشخص می‌شود.

برای یک نوسانگر هماهنگ ساده تنها متغیر $x(t)$ است و تکانه نظیر
آن نیز $p(t) = m\dot{x}$ است که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$p(t) = -mA\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad (۴-۱۰۲)$$

برای یافتن مسیر دستگاه در فضای فاز، یعنی فضای $x-p$ کافی است زمان

را بین روابط (۴-۱۰۲) حذف کنیم. برای این منظور داریم

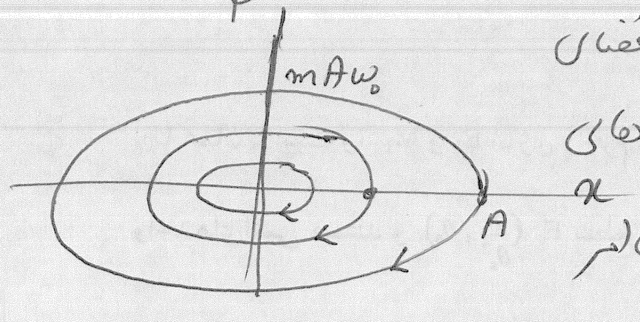
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{p}{-mA\omega_0}\right)^2=\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\sin^2(\omega_0 t+\varphi)=1$$

و یا

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{p^2}{(mA\omega_0)^2}=1 \qquad (۴-۱۰۲)$$

رابطه (۴-۱۰۲) نشان دهندهٔ یک بیضی در فضای فاز است. شکل (۴-۲۰) نمودار فاز را برای نوسانگری با دامنه‌های متفاوت نشان می‌دهد

هرچه دامنه نوسانگر بزرگتر باشد، دستگاه در فضای فاز بیضی بزرگتری را طی خواهد کرد. نمودارهای فاز هرگز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. دلیل این امر آن است که هر نقطه معرف یک شرایط اولیه خاص است و با یک شرایط اولیه منحصر بفرد دستگاه در آینده یک مسیر مشخص بیشتر نمی‌تواند داشته باشد. بنابراین قطع شدن نمودار فاز به معنی آن است که از یک شرایط اولیه دستگاه به دو مسیر متفاوت رفته است که درست نیست.



شکل (۴-۲۰)

همچنین دقت کنید که مسیر دستگاه در فضای فاز فقط می‌تواند مطابق پیکان‌های شکل (۴-۲۰) باشد. مثلاً توجه کنید که اگر دستگاه در لحظه $t=0$ در نقطه انتهای چپ بیضی یعنی در نقطه $(x=A, p=0)$ باشد، این به معنای آن است که نوسانگر در انتهای سمت چپ مسیر نوسان قرار گرفته و پس از آن فقط می‌تواند به سمت مبدأ برگردد و سرعت منفی (و در نتیجه تکانه منفی) داشته باشد.

اگر بیضی نمودار فاز را با یک بیضی معمولی در صفحه xy به معادله

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ مقایسه کنیم، می‌توانیم مساحت بیضی یعنی $S=\pi ab$ را برای بیضی نمودار فاز حساب کنیم. البته توجه کنید که در نمودار فاز کمیت های دو محور جنس های فیزیکی متفاوتی دارند و مساحت بیضی از جنس حاصل ضرب مکان در تکانه یعنی از جنس ML^2T^{-1} که از بعد انرژی × زمان است می‌باشد. در اینجا برای مساحت بیضی نمودار فاز داریم

$$S=\pi A(mA\omega_0)=\pi m\omega_0\left(\frac{2E}{k}\right)=\frac{E}{\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)}\qquad(۱.۴-۴)$$

که در آن از روابط $E=\frac{1}{2}kA^2$ و $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ استفاده کرده‌ایم. نتیجه (۱.۴-۴) را به شکل زیر می‌توان بیان کرد

$$S=\frac{E}{\nu}\qquad(۱.۵-۴)$$

که $\nu=\frac{\omega_0}{2\pi}$ بسامد نوسانگر است. این نتیجه در مکانیک کوانتمی حائز اهمیت است. در مکانیک کوانتمی خواهید دید که رابطه انرژی و بسامد برای یک نوسانگر هماهنگ به صورت

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu\qquad(۱.۶-۴)$$

است که در آن n یک عدد صحیح غیرمنفی است. بنابراین نتیجه (۱.۵-۴) بیانگر آن است که مساحت نمودار فاز یک نوسانگر حداقل $\frac{h}{2}$ است و مقادیر ممکن بعدی آن $\frac{3h}{2}$، $\frac{5h}{2}$ و ... است. به بیان دیگر در مکانیک کوانتمی دستگاه نمی‌تواند در نقطه تعادل نوسانگر ساکن قرار گیرد چون مساحت نمودار فاز آن صفر خواهد شد. البته

چنین چیزی در مکانیک کلاسیک بلامانع است.

نمودار فاز برای نوسانگر میرا اندکی متفاوت است. با فرض میرایی اندک روابط $x(t)$ و $P(t)$ چنین است

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\varphi)$$

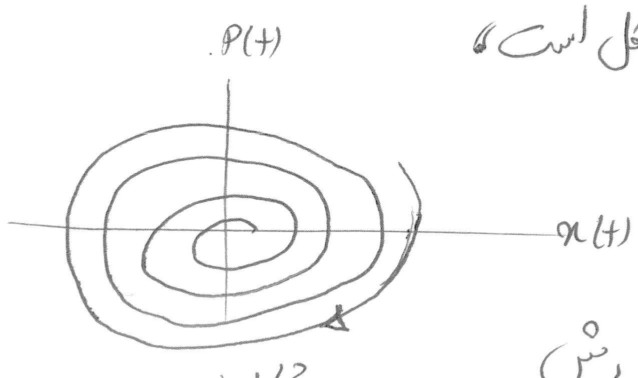
$$P \simeq -m\omega_0 Ae^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t+\varphi) \qquad (۴-۱۰۷)$$

با توجه به روابط (۴-۹۳) و (۴-۹۵)

در این حالت به جای رابطه (۴-۱۰۲) خواهیم داشت

$$\left(\frac{xe^{\gamma t}}{A}\right)^2 + \left(\frac{Pe^{\gamma t}}{mA\omega_0}\right)^2 = 1 \qquad (۴-۱۰۸)$$

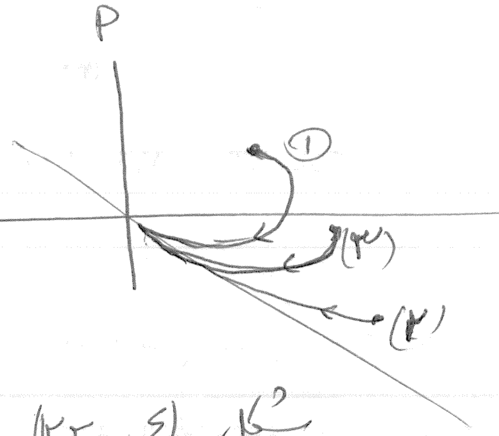
اگر از عامل $e^{\gamma t}$ در هرکدام از پرانتزها چشم پوشی کنیم رابطه (۴-۱۰۸) درست مشابه به معادله بیضی (۴-۱۰۲) است. در یک دور نوسان Q (برای عامل Q بزرگ) می‌توان با تقریب جزئی $e^{\gamma t}$ را ثابت گرفت و فرض کرد کمیتهای $xe^{\gamma t}$ و $Pe^{\gamma t}$ روی یک بیضی به قطرهای $2A$ و $2mA\omega_0$ حرکت می‌کند که مشابه به یکی از ~~شکل~~ بیضی های شکل (۴-۲۰) است. اما با کاهش تدریجی بزرگی میانگین x و P با عامل $e^{-\gamma t}$ مسیر دستگاه در نمودار فاز مطابق شکل (۴-۲۱) یک حلزونی بیضی شکل است که در جهت پادساعتگرد روی مبدأ سقوط می‌کند. درحقیقت در هر دور حرکت دستگاه تقریباً روی یک بیضی حرکت می‌کند که درست روی خودش برنمی‌گردد بلکه اندازه‌اش اندکی کوچکتر می‌شود. شکل ... برای $Q \simeq 10^4$ پس از ده هزار بار چرخیدن، قطرهای بیضی به $\frac{1}{e}$



شکل (۴-۲۱)

مقدار اولیه اش می رسد.

نمودار فاز برای نوسانگر تند میرا با شرطها اولیه $x(0)>0$ مشابه یکی از مسیرهای شکل (۴-۲۳) است.



شکل (۴-۲۳)

نمودار (۱) برای حالتی است که سرعت اولیه مثبت باشد، یعنی همان حالتی که نمودار $x-t$ آن نمودار (۱) در شکل (۴-۱۷) است. نمودارهای (۲) و (۳) برای سرعت اولیه منفی است و با حالتهای مربوط به نمودارهای (۲) و (۳) شکل (۴-۱۷) انطباق دارند. هر سه نمودار در زمان بسیار بزرگ به خط $\lim_{t\to\infty}\frac{P(t)}{x(t)}$ مجانب هستند. این نکته با محاسبه $P=m(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})x$ قابل دستیابی است و اثبات آن بر عهده خواننده است.

— نوسانگر هماهنگ واداشته

در این بخش نوسانگر هماهنگ میرایی را در نظر می گیریم که علاوه بر نیروی بازگرداننده خطی و نیروی میرایی متناسب با سرعت تحت اثر یک نیروی خارجی وابسته به زمان نیز قرار دارد. به چنین دستگاهی نوسانگر هماهنگ واداشته یا باختصار نوسانگر واداشته گفته می شود. اگر نیروی خارجی اعمال شده $F(t)$ باشد، قانون نیوتن برای این دستگاه به صورت زیر خواهد بود

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F(t) \qquad \text{(۴-۱۰۹ قبل)}$$

که با استفاده از نمادگذاری های قبلی آن را به صورت زیر می توان نوشت

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0(t)}{m} \qquad (۴-۱۰۹)$$

در حال حاضر توجه خود را به نیروی واداشته سینوسی معطوف می‌کنیم. بعداً خواهیم دید با توجه به پاسخ مسئله به نیروی سینوسی می‌توان پاسخ را برای یک دسته بزرگ از نیروهای واداشته، که نیروهای دوره‌ای باشند، به سهولت نوشت. به این منظور فرض می‌کنیم $F(t)=F_0\cos(\omega t+\varphi)$، به این ترتیب معادله (۴-۱۰۹) به صورت زیر خواهد بود

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=A_0\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۱۱۰)$$

که $A_0=F_0/m$. بسامد ω را بسامد نیروی واداشته می‌گوییم که مربوط به دستگاهی است که از بیرون نوسان‌های واداشته روی نوسانگر اعمال می‌کند. این بسامد ارتباطی با $\omega_0=\sqrt{k/m}$ و یا $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ ندارد و می‌تواند هر مقداری از صفر تا بینهایت داشته باشد.

معادله (۴-۱۱۰) همان معادله (۴-۸۸) است که در سمت راست به جای صفر، عبارت $A_0\cos(\omega t+\varphi)$ قرار گرفته است. به همین جهت به معادله (۴-۱۱۰) یک معادله دیفرانسیل ناهمگن و به معادله (۴-۸۸) معادله دیفرانسیل همگن نظیر آن گفته می‌شود. فرض کنیم $x_1(t)$ و $x_2(t)$ دو حل متفاوت از معادله دیفرانسیل غیرهمگن (۴-۱۱۰) باشند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2+2\gamma\dot{x}_2+\omega_0^2 x_2&=A_0\cos(\omega t+\varphi)\\ \ddot{x}_1+2\gamma\dot{x}_1+\omega_0^2 x_1&=A_0\cos(\omega t+\varphi)\end{aligned} \qquad (۴-۱۱۱)$$

با کم کردن این دو معادله از یکدیگر و با فرض $x(t)=x_2(t)-x_1(t)$ داریم

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \qquad (۴-۱۱۲)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تفاوت هر دو حل دلخواه از معادله دیفرانسیل غیرهمگن

(۴-۱۱۰) حلی از معادله دیفرانسیل همگن نظیر آن است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که اگر به هر حل خاص $x_1(t)$ از معادله غیرهمگن (۴-۱۱۰) حلی از معادله همگن (۴-۱۱۲) را بیفزاییم در این صورت $x_2(t)=x_1(t)+x(t)$ یک حل دیگر از معادله غیرهمگن (۴-۱۱۰) می شود. نکته جالب توجه آن است که معادله دیفرانسیل (۴-۱۱۰) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است که کلی ترین حل آن شامل دو ثابت اختیاری است. از طرف دیگر کلی ترین حل معادله دیفرانسیل همگن (۴-۱۱۲) نیز شامل دو ثابت اختیاری است. بنابراین اگر $x_1(t)$ یک حل خاص از معادله غیرهمگن باشد، که شامل هیچ ثابت اختیاری نیست، و به آن حل $x(t)$ معادله همگن که شامل دو ثابت اختیاری است را بیفزاییم حل $x_2(t)$ از معادله دیفرانسیل غیرهمگن (۴-۱۱۰) شامل دو ثابت اختیاری را به دست خواهیم آورد. این نتیجه کلی را به شکل گزاره زیر بیان می کنیم:

کلی ترین حل معادله دیفرانسیل غیرهمگن = یک حل خاص معادله دیفرانسیل غیرهمگن + کلی ترین حل معادله دیفرانسیل همگن (۴-۱۱۳)

حل عمومی معادله دیفرانسیل همگن

توجه داشته باشید که این نتیجه جالب توجه مدیون خطی بودن معادله دیفرانسیل نوسانگرهای هماهنگ است. در واقع معادله (۴-۱۱۰) را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x(t)=A_0\cos(\omega t+\varphi) \qquad (۴-۱۱۴)$$

عبارت داخل پرانتز در سمت چپ رابطه (۴-۱۱۴) یک عملگر دیفرانسیل خطی است، یعنی عملگری که به صورت خطی روی ترکیب های خطی از توابع اثر می کند. اگر این عملگر

را K نشان میدهیم داریم، خاصیت خطی ~~$K(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$~~ بودن به شکل زیر بیان می‌شود:

$$K(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 K(x_1) + \alpha_2 K(x_2) \qquad (4-115)$$

از آنجی که قبل از این در مورد حل عمومی معادله همگن (4-112) در بخش گذشته مفصلاً بحث کرده‌ایم، از اینجا به بعد توجه خود را به حل خاص معادله (4-110) معطوف می‌کنیم. از هر راهی که بتوانیم یک حل خاص از این معادله را حدس بزنیم تفاوتی ندارد و نهایتاً گزاره (4-114) تضمین می‌کند که بعداً کلی‌ترین حل را در دست داریم.

برای یافتن حل خاص معادله غیرهمگن (4-110) مجدداً از روش اعداد مختلط استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم $A=A_0 e^{i\varphi}$ معادله (4-110) را می‌توان به صورت بخش حقیقی معادله زیر ~~...~~ در نظر گرفت

$$\ddot{Z} + 2\gamma \dot{Z} + \omega_0^2 Z = A e^{i\omega t} \qquad (4-116)$$

حل خاص معادله (4-116) را به صورت $Z(t) = Z_0 e^{i\omega t}$ حدس می‌زنیم، یعنی یک حل نوسانی با همان بسامد نیروی وادارنده. اگر این حل را در معادله (4-116) قرار دهیم خواهیم داشت

$$(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) Z_0 e^{i\omega t} = A e^{i\omega t} \qquad (4-117)$$

به این ترتیب داریم

$$Z_0 = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} \qquad (4-118)$$

در حل نوسانی $Z(t) = Z_0 e^{i\omega t}$ دامنه مختلط Z_0 شامل اطلاعات مربوط به دامنهٔ

حرکت و نیز اطلاعات فاز حرکت است.

اگر مخرج کسر سمت راست رابطه (۴-۱۱۸) را در نمایش قطبی اعداد مختلط بنویسیم داریم

$$\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\; e^{i\delta} \qquad (۴-۱۱۹)$$

که در آن

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (۴-۱۲۰)$$

بنابراین رابطه (۴-۱۱۸) به صورت زیر در می‌آید

$$Z = \frac{A_0 e^{i(\varphi-\delta)}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \qquad (۴-۱۲۱)$$

بنابراین بخش حقیقی $Z(t)=Ze^{i\omega t}$ که حل خاص معادله غیرهمگن (۴-۱۱۰) است به صورت زیر در می‌آید

$$x(t) = D(\omega)\cos(\omega t+\varphi-\delta(\omega)) \qquad (۴-۱۲۲)$$

که در آن $D(\omega)$ دامنهٔ نوسان واداشته و $\delta(\omega)$ اختلاف فاز پاسخ نوسانگر به نیروی واداشته است. $\delta(\omega)$ از رابطه (۴-۱۲۰) به دست می‌آید و $D(\omega)$ به صورت زیر است

$$D(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \qquad (۴-۱۲۳)$$

دقت کنید که در این حل خاص بسامد، دامنه و فاز نوسان دست ما نیست و باید دقیقاً طوری تعیین شوند که رابطه (۴-۱۲۲) جواب معادله

غیر همگن مورد نظر ما باشند. با استفاده از گزاره (۴-۱۱۴) عمومی‌ترین حل معادله (۴-۱۱۰) چنین خواهد بود

$$x(t) = D(\omega)\cos(\omega t + \varphi - \delta(\omega)) + B e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \beta) \qquad (۴-۱۲۴)$$

که در آن B و β ثابت‌های اختیاری هستند. نکتهٔ جالب توجه آن است که بخش دوم از جواب (۴-۱۲۴) که شامل ثابت‌های اختیاری است با گذشت زمان به مرور میرا می‌شود و باقی نمی‌ماند. به همین دلیل به این بخش از حل، بخش گذرا گفته می‌شود. برعکس آنچه از رابطه (۴-۱۲۲) داده می‌شود بخش مانای حل است که تا زمانی که نیروی واداشته استمرار دارد، برقرار خواهد ماند. این نکته نشان می‌دهد که در بسیاری از موارد جزئیات شرایط اولیه برای نوسانگرهای هماهنگ واداشته اهمیت ندارد، چرا که این جزئیات فقط در قسمت گذرای عبارت (۴-۱۲۴) اثر دارند. با این وجود ممکن است مسائل خاصی برای نوسانگرهای هماهنگ داده شود که در آن لازم باشد حل کلی (۴-۱۲۴) در نظر گرفته شود و شرایط اولیه مسئله به آن اعمال گردد.

~~روابط (۴-۱۲۰) و (۴-۱۲۴) بیانگر پاسخ نوسانگرهای هماهنگ به نیروی واداشته هستند. در بخش بعد به بررسی رفتار این حرکت‌ها با~~

- تشدید

روابط (۴-۱۲۰) و (۴-۱۲۲) بیانگر پاسخ نوسانگر هماهنگ به نیروی واداشته سینوسی با بسامد ω هستند. چنانکه این می بینیم این پاسخ در بسامدهای مختلف یکسان نیست. در این بخش می خواهیم رفتار این دو تابع یعنی $D(\omega)$ ~~دامنه~~ دامنه نوسانات واداشته و $\delta(\omega)$ اختلاف فاز نوسان واداشته با نیروی اعمال شده را بررسی کنیم.

برای سهولت ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که میرایی وجود نداشته باشد یعنی حالتی که $\gamma=0$. در این حالت از رابطه (۴-۱۲۲) داریم

$$D(\omega)=\frac{F_0/m}{|\omega_0^2-\omega^2|} \qquad (۴-۱۲۵)$$

و از رابطه (۴-۱۲۰) نیز به دست می آید $\delta(\omega)=0$ که نشان دهندهٔ اختلاف فاز صفر یا π بین نیروی واداشته و پاسخ دستگاه است.

از محاسبهٔ مستقیم می توان دید که $x=D\cos\omega t$ جواب معادله

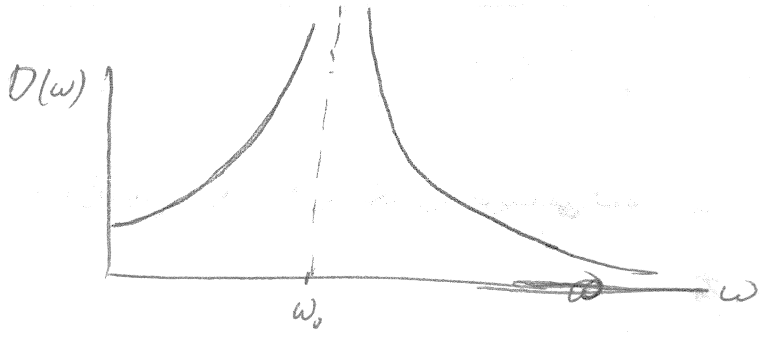
$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (۴-۱۲۶)$$

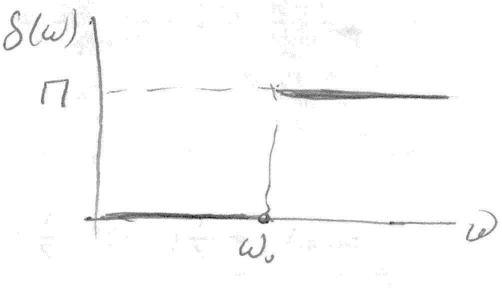
است اگر

$$x(t)=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t \qquad (۴-۱۲۷)$$

به ازای $\omega<\omega_0$ اختلاف فاز صفر و به ازای $\omega>\omega_0$ اختلاف فاز π است.

شکل (۴-۳۲) نمودار بستگی $D(\omega)$ و $\delta(\omega)$ از رابطه (۴-۱۲۵) را به ω نشان می دهد.



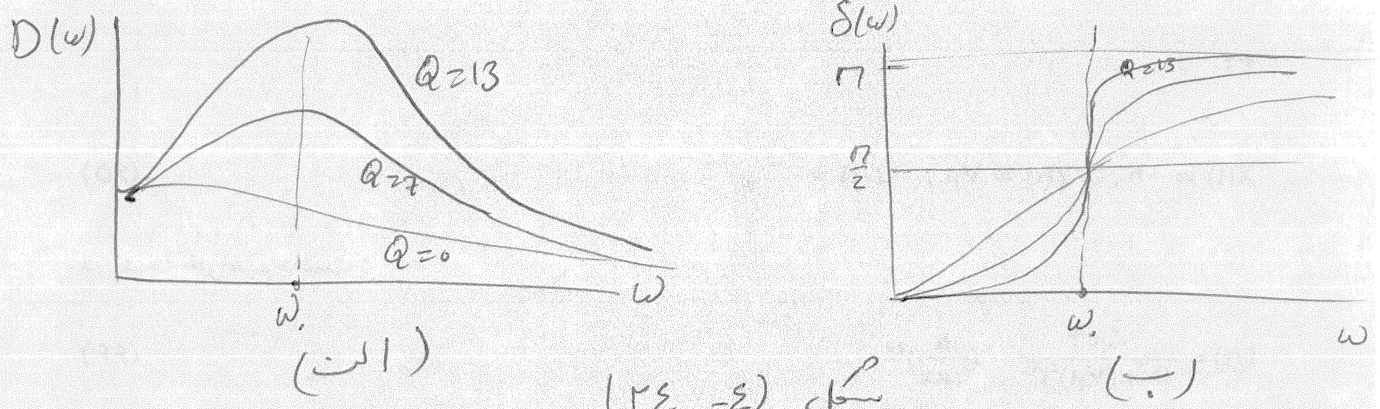


(۲۳-۴)

چنانکه می بینیم به ازای $\omega=\omega_0$ دامنه نوسان نامتناهی می شود و اختلاف فاز δ نیز یک پرش ناگهانی از صفر به π دارد. این رفتار را می توان به طور کیفی با یک کش لاستیکی آزمود. وزنه ای در حدود ۱۵۰ گرم را به انتهای یک کش لاستیکی بیاویزید و با تکان دادن نقطه آویز دستگاه را به پایین و بالا به نوسان در آورید. اگر این کار را در بسامدهای کم انجام دهید وزنه آویخته از حرکت دست شما پیروی می کند و با آن هم فاز است. اما اگر دست خود را با بسامد زیاد پایین و بالا ببرید وزنه خلاف جهت حرکت دست شما عکس العمل نشان می دهد. اگر بسامد را طوری تغییر دهید که به بسامد بین این دو وضعیت نزدیک شوید، دستگاه به شدت عکس العمل نشان می دهد و دامنه آنقدر زیاد می شود که از کنترل خارج می گردد.

در حضور عامل میرایی نیز دامنه در نزدیکی $\omega=\omega_0$ بزرگ می شود اما دیگر نامتناهی نخواهد شد. شکل (۴-۲۴) رفتار $D(\omega)$ و $\delta(\omega)$ را برای مقادیر مختلف عامل کیفیت برحسب ω رسم کرده ایم. با صفر قرار دادن $\frac{dD}{d\omega}$ بسامدی که بیشینه دامنه را می دهد به صورت

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2} \qquad (۴\text{-}۱۲۸)$$



شکل (۴-۲۴)

به دست می‌آید. همچنین ~~مقدار~~ بیشینه $D(\omega)$ چنین خواهد بود

$$D_{m} = D(\omega_R) = \frac{F_0/m}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} \qquad (۴-۱۲۹)$$

برای میرایی کم بسامد تشدید ω_R به بسامد طبیعی ω_0 نزدیک خواهد بود و ارتفاع قلهٔ تشدید نیز بیشتر خواهد بود. همچنین می‌توان نشان داد که هرچه λ کوچکتر باشد عرض منطقهٔ تشدید کوچکتر است و برعکس برای λ بزرگ منحنی تشدید عرض زیادی دارد. برای $\lambda > \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0$ تابع $D(\omega)$ بیشینه ندارد و به طور همنوا کوچک خواهد شد. در شکل (۴-۲۴) به جای λ عامل Q در موارد مختلف ذکر شده است. یادآوری می‌کنیم که هرچه Q بزرگتر باشد میرایی کمتر است.

صرف نظر از جزئیات کمی نتیجهٔ کلی آن است که اگر بسامد نوسانهای واداشته به بسامد طبیعی دستگاه نزدیک باشد، ~~دستگاه~~ پاسخ دستگاه به محرک خارجی بزرگ خواهد بود. از آنجا که همواره دستگاههای نوسان کننده به نحوی با سازوکارهای میرایی همراه هستند حالت نشان داده شده در شکل (۴-۲۴) ایده‌آل است و در عمل اتفاق نمی‌افتد، یعنی میرایی باعث می‌شود دامنه پاسخ دستگاه در نزدیکی بسامد طبیعی نامتناهی نباشد. در دستگاههای مکانیکی و الکتریکی گاه علاقه‌مندیم که نوسانهای اعمال شده

با پاسخ بزرگی از طرف دستگاه مواجه نشود. مثلاً در طراحی سازه های ساختمانی علاقه مندیم که این سازه ها تحت اثر امواج زلزله (که بسامدهایی در حدود ۱۰ هرتز دارند) ارتعاش کمی داشته باشند. و یا در طراحی بدنه اتومبیل ها و ماشین آلات کارگاهی علاقه مندیم لرزش قطعات تحت اثر نوسانهایی که از موتور و یا حرکت آنها ناشی می شود کم باشد. در این گونه موارد باید با طراحی مناسب شکل قطعات و انبار آنها و نیز تعبیه کردن عوامل میرا ساز مناسب بسامد طبیعی و ضریب میرایی را چنان تنظیم کنیم که پاسخ دستگاه به نوسانهای وادارنده کوچک باشد. مثلاً با چسباندن لایه های قیراندود و مشابه آنها به قسمتهای داخلی بدنه ماشین ها، جرم و ضریب میرایی مناسب را در آنها ایجاد می کنند. در بعضی از دستگاهها نیز علاقه مند به تشدید در بسامدهای خاص هستیم. مثلاً در گیرنده های بسامدی الکتریکی نیاز به مدارهای تشدید در بسامدهای مخصوص داریم. درباره این دستگاهها بعداً بیشتر بحث می کنیم.

حال نگاهی کنیم به رفتار تابع $\delta(\omega)$، اختلاف فاز پاسخ دستگاه با نیروی وادارنده، بر حسب مقادیر مختلف ω. چنانچه در شکل (۴-۲۴ ب) می بینیم در بسامدهای خیلی کوچکتر از بسامد طبیعی $\delta(\omega)$ صفر است و در بسامدهای بسیار بزرگتر از آن $\delta(\omega)$ به π می رسد. منحنی $\delta(\omega)$ در گذر از ناحیه تشدید (حول و حوش ω_0) از صفر تا π صعود می کند. هر چه Q بزرگتر و γ کوچکتر باشد این صعود سریعتر است، یعنی در ناحیه کوچکتری قبل و بعد از ω_0 صورت می گیرد. برای $Q\to\infty$ که همان $\gamma\to 0$ است در $\delta(\omega)$ شاهد یک پرش ناگهانی مطابق شکل (۴-۲۴ ب) هستیم. به ازای $\omega=\omega_0$ مخرج کسر سمت راست رابطه (۴-۱۲۰)

صفر و δ نامتناهی می‌شود که با $\delta=\frac{\pi}{2}$ متناظر است. برای Q خیلی بزرگ (و Q کوچک) نمودار در نزدیکی تشدید به خط راست نزدیک است.

— تحلیل انرژی نوسانگر واداشته

در یک نوسانگر واداشته دارای میرایی با چندین منبع انرژی سروکار داریم که مدام بین آنها تبادل انرژی صورت می‌گیرد و به تغییر اثر انرژی پتانسیل کشسانی فنر و انرژی جنبشی مربوط به حرکت جسم، عامل میرایی باعث اتلاف انرژی مکانیکی و تبدیل آن به گرما می‌شود. در عین حال منبع خارجی که نیروی واداشته بر دستگاه اعمال می‌کند می‌تواند به دستگاه انرژی بدهد یا از آن انرژی بگیرد. بنابراین اصولاً به دلیل حضور نیروهای غیر پایستار که در اینجا نیروی میرایی و نیروی واداشته هستند پایستگی انرژی نداریم. با این وجود تحلیل کمیت $E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$ به عنوان انرژی مکانیکی دستگاه خالی از فایده نیست.

با فرض آنکه از شروع حرکت به اندازهٔ کافی فاصله داشته باشیم تا از حل گذرا چشم‌پوشی کنیم و با فرض آنکه نیروی میرایی $F(t)=F_0\cos\omega t$ باشد، برای حل پایا داریم

$$x(t)=D(\omega)\cos(\omega t-\delta)$$
$$v(t)=-D(\omega)\,\omega\,\sin(\omega t-\delta) \qquad (۴-۱۲۵)$$

که $D(\omega)$ و $\delta(\omega)$ در روابط (۴-۱۲۴) و (۴-۱۲۰) داده شده‌اند. بنابراین انرژی لحظه‌ای مکانیکی دستگاه چنین است

$$E(t)=\frac{1}{2}m(\omega_0^2+\omega^2)D^2$$

$$E(t)=\frac{1}{2}m\omega_0^2D^2\cos^2(\omega t-\delta)+\frac{1}{2}m\omega^2D^2\sin^2(\omega t+\delta) \qquad (۱۲۱-٤)$$

که در آن از $k=m\omega_0^2$ استفاده کرده‌ایم.

چنانکه دیده می‌شود انرژی مکانیکی دستگاه ثابت نیست و در طول زمان و بخصوص در طی هر پریود افت و خیز دارد، اما هر دو بخش جنبشی و پتانسیل همواره مثبت هستند. در چنین مواردی مقدار لحظه‌ای این کمیت‌ها برای ما چندان مهم نیست و به مقادیر متوسط آنها در هر پریود علاقه‌مندیم.

برای یک تابع دلخواه از زمان، متوسط زمانی در بازهٔ $[t_1,t_2]$ به صورت

$$\langle f\rangle=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\,dt \qquad (۱۲۲-٤)$$

تعریف می‌شود. اما اگر $f(t)$ پریودیک باشد و متوسط زمانی روی بازهٔ بزرگی از زمان که آن را برابر مضربی از پریود حرکت فرض کرد، گرفته شود، داریم

$$\langle f\rangle=\frac{1}{NT}\int_{t_0}^{t_0+NT}f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{NT}\,N\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\,dt \qquad (۱۲۳-٤)$$

اگر $f(t)$ همواره مثبت باشد متوسط آن در یک بازهٔ زمانی بسیار بزرگ در مقایسه با پریود تقریباً با متوسط روی مضربی از پریود، یعنی زمان NT برابر است و طبق رابطه (۱۲۳-٤) حاصل با همان متوسط زمانی روی یک پریود برابر است. بنابراین برای متوسط زمانی انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر داریم

$$\langle K\rangle=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left(\frac{1}{2}m\omega^2D^2\right)\cos^2(\omega t-\delta)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 D^2 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\omega t-2\delta)\right) dt$$

$$= \frac{1}{4} m\omega^2 D^2 \qquad (۱۲۴-۴)$$

در سطر دوم انتگرال جمله $\cos(2\omega t-2\delta)$ روی یک پریود صفر است و سهم جمله اول ضریب $\frac{1}{2}$ می‌شود. با محاسبهٔ مشابهی میانگین انرژی پتانسیل نیز چنین است

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} m\omega_0^2 D^2 \langle \sin^2(\omega t-\delta) \rangle$$

$$= \frac{1}{4} m\omega_0^2 D^2 \qquad (۱۲۵-۴)$$

و در مجموع انرژی میانگین مکانیکی دستگاه چنین است

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_0^2+\omega^2}{2}\right) D^2 \qquad (۱۲۶-۴)$$

با قرار دادن D از رابطه (۱۲۲-۴) در رابطه (۱۲۶-۴) داریم

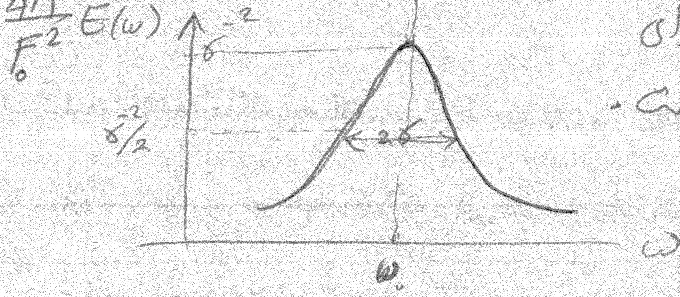
$$E(\omega) \equiv \langle E \rangle = \frac{F_0^2}{4M} \frac{\omega^2+\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \qquad (۱۲۷-۴)$$

می‌توان رفتار تابع $E(\omega)$ را در بازهٔ وسیعی از بسامدها بر حسب ω رسم کرد. به وضوح می‌توان دید که اگر ω با ω_0 فاصله قابل توجهی داشته باشد مخرج کسر دوم در رابطه (۱۲۷-۴) بزرگ است و نوسانگر انرژی قابل توجهی ندارد. اما رفتار $E(\omega)$ در نزدیکی بسامد طبیعی ω_0 جالبتر است. در این منطقه می‌توان عبارت (۱۲۷-۴) را تقریباً به صورت زیر نوشت

$$E(\omega) = \frac{F_0^2}{4M} \frac{2\omega_0^2}{(\omega_0-\omega)^2(2\omega_0)^2+4\gamma^2\omega_0^2} \qquad (۱۲۸-۴)$$

$$= \frac{F_0^2}{8M} \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2}$$

تابعی به شکل رابطهٔ (۴-۱۲۸) شکل ساده و مهمی دارد که به آن تابع تشدید گفته می‌شود و در جاهای متعددی اهمیت فیزیکی دارد. این تابع شکل کله قندی متقارنی حول ω_0 دارد که در شکل (۴-۲۵) داده شده است. بیشینه این تابع به ازای $\omega=\omega_0$ به دست می‌آید که برابر γ^{-2} است.



شکل (۴-۲۵)

عرض منحنی تشدید را فاصله بین بسامدهایی می‌گیریم که برای آنها $E(\omega)$ به نصف مقدار بیشینه رسیده باشد. از رابطهٔ (۴-۱۲۸) می‌بینیم که این بسامدها به ازای $\omega=\omega_0\pm\gamma$ به دست می‌آیند و با هم 2γ فاصله دارند. هرچه γ کوچکتر شود عرض تابع تشدید کوچکتر و قلهٔ آن تیزتر خواهد شد. دقت کنید که در فواصل دورتر از بازهٔ تشدید، یعنی برای ωهایی که $|\omega-\omega_0|$ خیلی از γ بیشتر باشد، شکل (۴-۲۵) مقدار درست $E(\omega)$ را به ما نمی‌دهد و باید به رابطهٔ اصلی (۴-۱۲۷) بازگشت. اما در نزدیکی بسامد طبیعی می‌بینیم که با کاهش میرایی و افزایش عامل کیفیت تابع تشدید به تابع تیزتری حول ω_0 تبدیل می‌شود. در این حالت می‌گوییم دستگاه بسامدگزین خوبی است. یعنی اگر از خارج در معرض اختلالات متنوعی قرار گیرد فقط به اختلال خاصی که با بسامد طبیعی‌اش سازگار است پاسخ درخور توجهی می‌دهد.

در اینجا مناسب است به اثر عامل میرایی در رفتار انرژی یک نوسانگر غیرواداشته با زمان مجدداً توجه کنیم. یک بار دیگر به رابطهٔ (۴-۹۷)

برای $E(\omega)$ و نمودار آن در شکل (۴- ۱۹) توجه کنید. در آنجا دیدیم که در حل

انرژی یک نوسانگر هماهنگ با میرایی کم که در حالت

زمان $\tau = \frac{1}{2\delta}$ مقدار اولیه می‌رسد. اگر این زمان را به

تعادل منحرف شده است به $\frac{1}{e}$

نوعی طول عمر برانگیختگی یک نوسانگر تلقی کنیم می‌توانیم نتیجه بسیار

مهم زیر را به دست آوریم:

$$\tau\,\Delta\omega \approx 1 \qquad (4-129)$$

این رابطه می‌گوید طول عمر برانگیختگی یک نوسانگر در عرض تشدید

حاصل ضرب

پاسخ بسامدی دستگاه به تحریکات خارجی از مرتبه یک است و از

ضریب میرایی یا بسامد طبیعی دستگاه مستقل است. علت اینکه از علامت $\approx$

به جای علامت دقیق تساوی استفاده کردیم آن است که معیار ما در

تعیین طول عمر برانگیختگی می‌توانست به جای $\frac{1}{e}$ کسر دیگری باشد و یا

معیار ما در تعیین عرض تشدید می‌توانست به جای نقاط با نصف ارتفاع

قله کسر دیگری از ارتفاع قله باشد. بنابراین رابطه (۴- ۱۲۹) فقط مرتبهٔ

بزرگی حاصلضرب دو کمیت، یکی با بعد زمان و دیگری با بعد عکس زمان،

را بیان می‌کند و یک تساوی دقیق فیزیکی نیست. در فیزیک کوانتمی رابطه

~~~~ بیان اصل عدم قطعیت انرژی - زمان است.

بر مبنای این اصل (۴- ۱۲۹) با استفاده از فرض اساسی پلانک به صورت $E = \hbar\omega$

(که در آن $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ و h ثابت پلانک است)، می‌توان نوشت

$$\tau\,\Delta E \approx \hbar \qquad (4-140)$$

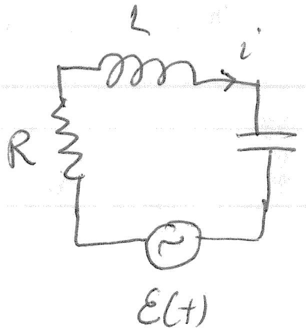
که می‌گوید طول عمر یک تراز برانگیخته هر دستگاه کوانتمی با عرض منحنی تشدید
~~~~

برای تحریک خارجی که منجر به برانگیخته شدن دستگاه به آن حرکت می شود

رابطه معکوس دارد و حاصل ضرب این دو کمیت از مرتبه $\hbar$ است.

— نوسانگر واداشته الکتریکی

پیش از این در مثال ۲ بخش (۴-۳) با مدار الکتریکی نوسان کننده LC آشنا شدیم. اگر به این مدار یک مقاومت الکتریکی و یک منبع نیروی محرکه وابسته به زمان اضافه کنیم، (مطابق مدار شکل ۴-۲۶) قانون



(شکل ۴-۲۶)

حلقه برای این دستگاه به صورت زیر خواهد بود:

$$-Ri - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{c} + \mathcal{E}(t) = 0 \qquad (۴-۱۴۱)$$

و یا

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}(t)}{L} \qquad (۴-۱۴۲)$$

که در آن $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ و $\gamma = \frac{R}{2L}$ به ترتیب بسامد طبیعی و ضریب میرایی نوسان کننده الکتریکی هستند. از تشابه معادلات (۴-۱۴۱) و (۴-۱۴۲) با نسخه مکانیکی آنها در معادله (۴-۱۰۹ قبل) و (۴-۱۰۹) می توان جایگزینی های زیر را برای تبدیل نتایج دو سیستم به یکدیگر انجام داد

مکانیکی	الکتریکی
$x(t)$	$q(t)$
$v(t)$	$i(t)$
m	L
k	$\frac{1}{C}$
b	R
$F(t)$	$\mathcal{E}(t)$

(۴-۱۴۳)

بنابراین بدون نیاز به تکرار مطالب فقط می توان نام ها را عوض کرد. کلیه مفاهیمی

که در بخش گذشته در صورد تشدید گفتیم در اینجا نیز برای مدار شکل (٤-٣٦)

قابل تکرار است. اگر نیروی محرکه $\mathcal{E}(t)$ ناشی از سیگنال تقویت شده

یک آنتن باشد، مدار شکل (٤-٣٦) را یک مدار تشدید می گویند. اگر

عامل کیفیت مدار، یعنی

$$Q=\frac{\omega_0}{2\gamma}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (٤-١٤٤)$$

بزرگ باشد، دستگاه یک بسامدگزین خوب است، چنین دستگاهی

فقط به سیگنالی که از نزدیک به یک بسامد خاص است پاسخ می دهد و

ایستگاه خاص مخابره شده و

سایر سیگنال ها را دریافت نمی کند. این ایده پایه اولیه گیرنده های مخابراتی

است، که حوزه گسترده ای از کاربردها را شامل می شود. در گیرنده های قدیمی

با پیچاندن دکمه تنظیم گیرنده ظرفیت یک خازن متغیر را چنان تغییر می دهند که

بسامد طبیعی دستگاه برروی بسامد ارسال علامت از یک ایستگاه رادیویی خاص

(و یا یک پایانه بیسیم خاص) تنظیم شود و دستگاه فقط علامت ارسالی از آن

ایستگاه را دریافت کند.

فرض کنیم نیروی محرکه خارجی، بستگی سینوسی به زمان داشته باشد و آن را

به شکل مختلط $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}_m e^{i\omega t}$ بنویسیم. اگر حل خاص و مانای معادله (٤-١٤٢) برای $q(t)$

را به صورت $q(t)=q_m e^{i\omega t}$ حدس بزنیم، جریان مدار نیز به شکل

$I(t)=I_m e^{i\omega t}$ است به طوری که

$$I_m e^{i\omega t}=\frac{d}{dt}\left(q_m e^{i\omega t}\right) \Rightarrow q_m=\frac{I_m}{i\omega} \qquad (٤-١٤٥)$$

حال از معادله (۴-۱۴۲) داریم

$$\left(R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right) I_m = \mathcal{E}_m \qquad (۴-۱۴۶)$$

عبارت داخل پرانتز در رابطه (۴-۱۴۶) امپدانس مدار تشدید RLC نامیده می‌شود و با Z نشان داده می‌شود. رابطه فوق نشان می‌دهد که اگر به خودالقا امپدانس $i\omega L$ و به خازن امپدانس $\frac{1}{i\omega C}$ و به مقاومت امپدانس R نسبت دهیم، در حالت سری امپدانس‌ها درست مثل مقاومت‌ها در یک مدار الکتریکی با هم جمع می‌شوند. نکته جالب آن است که عامل i در صورت و مخرج عبارت‌های مربوط به امپدانس خودالقا و خازن به ترتیب اختلاف فاز $\pi/2$ و $-\pi/2$ بین ~~...~~ نیروی محرکه اعمال شده و پاسخ مدار ($I(t)$) را ایجاد می‌کند، به طوری که می‌توان نوشت

$$Z_L = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad (۴-۱۴۷)$$

حاصل جمع شدن امپدانس‌ها در رابطه (۴-۱۴۶) را به صورت $Z=|Z|e^{i\delta}$ نشان دهیم، درست مشابه به محاسباتی که به روابط (۴-۱۲۰) و (۴-۱۲۲) منتهی شد داریم

$$|Z| = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)+4\gamma^2\omega^2}\; L$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (۴-۱۴۸)$$

که آن را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

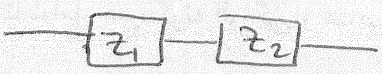
$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{L}{C} - L\omega^2\right)^2 + R^2\omega^2} \qquad (۱۴۹-٤)$$

$$tg\,\delta = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

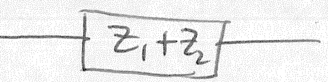
با بازگشت به اعداد حقیقی دامنه جریان به صورت $|I_m| = \frac{|E_m|}{|Z|}$

با دامنه ولتاژ اعمال شده متناسب است و اختلاف فاز جریان با ولتاژ نیز $(-\delta)$ است.

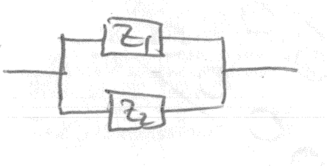
خواننده در فیزیک مقدماتی با شیوه های جمع کردن سری یا موازی مقاومت ها آشناست. درست مشابه همین قواعد برای جمع امپدانس ها نیز برقرار است. تحلیل فوق نشان می دهد که برای دو امپدانس سری شده به صورت



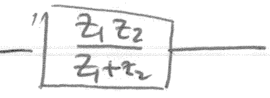
می توان امپدانس



را جایگزین کرد. به همین طریق و با نوشتن معادلات دیفرانسیل مربوطه در یک لحظهٔ دلخواه می توان نشان داد که برای اتصال موازی دو امپدانس به صورت

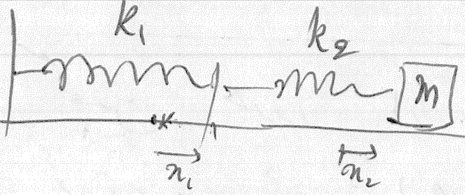


امپدانس معادل برابر با است



اثبات این امر را بر عهدهٔ خواننده می گذاریم. اما نکته مهم آن است که قواعد ترکیب اجزاء یک نوسان کننده مکانیکی به سادگی نوسانگر

الکتریکی نسبت و مخصوص جایگزینی $\frac{1}{c} \leftrightarrow k$ بین دستگاه‌های مکانیکی و
الکتریکی کار را تا حدی دشوار می‌کند. در نوسانگر الکتریکی وقتی خازنها باهم
موازی بشوند مثل آن است که بار آنها در خازن معادل باهم جمع شده است.
اما در نوسانگر مکانیکی، جابه‌جایی‌ها وقتی باهم جمع می‌گردند که فنرها باهم
سری باشند. شکل (۴-۲۷) دو فنر سری شده به هم را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۷

اگر تغییر طول فنر اول x_1 و تغییر طول فنر دوم x_2 باشد، جابه‌جایی جرم m از وضعیت تعادل $x = x_1 + x_2$ است.

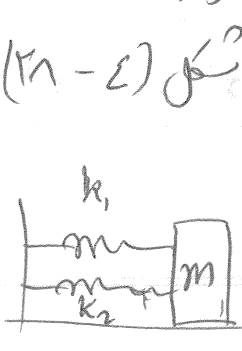
اگر فرض کنیم نقطهٔ اتصال دو فنر یک ذره بدون جرم باشد از برابری نیروها داریم $-k_1x_1 = -k_2x_2$ و معادله حرکت جرم m نیز به صورت زیر است

$$m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2) = -k_2x_2 = -k_1x_1 \qquad (۴-۱۵۰)$$

از رابطه برابری نیروها داریم $x_2 = \frac{k_1}{k_1+k_2}(x_1+x_2)$ و درنتیجه

$$m\ddot{x} = -\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\right)x \qquad (۴-۱۵۱)$$

که نشان می‌دهد فنر معادل با دو فنر سری شده k_1 و k_2 دارای ضریب $\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ است. این حالت درست مشابه امپدانس‌های موازی شده در مدار الکتریکی است. اگر فنرها را به طور موازی مطابق شکل (۴-۲۸) به هم ببندیم جابه‌جایی برای هر دو یکسان است، اما نیروها باهم جمع می‌شوند. در این حالت داریم



شکل (۴-۲۸)

$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2x \qquad (۴-۱۵۲)$$

که حاکی از آن است که درست برعکس امپدانس‌ها، ثابت فنرهای موازی