شده با هم جمع می‌شوند. برای دستگاه‌های مکانیکی پیچیده‌تر ~~روش~~ روش اصلی آن است که معادلات حرکت نوشته شود و در صورت امکان دستگاه مکانیکی معادل با ترکیب‌های مورد نظر پیشنهاد شوند.

- نیروی وادارنده دوره‌ای - بسط فوریه

در بخش (۴-...) تاکید کردیم که عامل انتگرال‌گیری در معادله حرکت نوسانگرهای هماهنگ خطی است. حال فرض کنیم نوسانگرهای هماهنگ تحت اثر نیروی وادارنده‌ای قرار دارد که جمعی از مؤلفه‌های $F_n(t)$ را شامل می‌شود. معادله نوسانگرهای هماهنگ را در این حالت به صورت زیر می‌نویسیم

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x(t)=\frac{1}{m}\sum_n F_n(t) \qquad (۱۵۳-۴)$$

متغیر n که روی آن جمع زده شده جنبه نمادین دارد و می‌تواند شامل هر مجموعه‌ای از شاخص‌ها باشد که مؤلفه‌های $F_n(t)$ را برچسب می‌زنند. فرض کنیم تابع $x_n(t)$ جواب معادله نوسانگرهای هماهنگ برای نیروی وادارنده شامل تک مؤلفه $F_n(t)$ باشد یعنی

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x_n(t)=\frac{1}{m}F_n(t) \qquad (۱۵۴-۴)$$

با توجه به خطی بودن عملگر داخل پرانتز در روابط (۱۵۴-۴) و (۱۵۳-۴) اگر تابع $x(t)=\sum_n x_n(t)$ را در معادله (۱۵۳-۴) قرار دهیم، آن را برآورده می‌کند.

حال فرض کنیم نوسانگرهای هماهنگ میرا تحت اثر جمعی از نیروهای وادارنده سینوسی به شکل زیر باشد:

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{1}{m}\sum F_n\cos(n\omega t+\varphi_n) \qquad (۱۵۵-۴)$$

جواب حالت پایای نوسانگر به مؤلفه nام نیروی واداشته فوق x_n که از معادله زیر تبعیت می کند

$$\ddot{x}_n + 2\gamma\dot{x}_n + \omega_0^2 x_n = \frac{1}{m}F_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \qquad (۴-۱۸۶)$$

که همان معادله نوسانگر هماهنگ میرای واداشته (۴-۱۱۴) با بسامد واداشته $n\omega$ است. جواب معادله (۴-۱۸۶) را مطابقه رابطه (۴-۱۲۲) به صورت زیر می توان نوشت

$$x_n(t) = D_n(\omega)\cos(n\omega t + \varphi_n + \delta_n(\omega)) \qquad (۴-۱۸۷)$$

که در آن $D_n(\omega)$ و $\delta_n(\omega)$ از روابط (۴-۱۲۳) و (۴-۱۲۰) بدست می آیند

$$D_n(\omega) = \frac{F_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\gamma^2 n^2\omega^2}}$$

$$\delta_n(\omega) = tg^{-1}\frac{2\gamma n\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2} \qquad (۴-۱۸۸)$$

حل کلی معادله (۴-۱۸۴) نیز به صورت زیر خواهد بود

$$x(t) = \sum_n D_n(\omega)\cos(n\omega t + \varphi_n - \delta_n(\omega)) \qquad (۴-۱۸۹)$$

که شامل هیچ ثابت اختیاری نیست. توجه داشته باشید که عوامل F_n و φ_n دامنه و فاز مؤلفه های نیروی واداشته هستند که به شکل نیرو بستگی دارند و با شرایط اولیه مسئله ارتباطی ندارند.

به ترکیبی از نیروهای واداشته که سمت راست معادله (۴-۱۸۴) قرار گرفته است بسط فوریه و به هر کدام از عبارتهای $F_n\cos(n\omega t+\varphi_n)$ مؤلفه های فوریه ای می گوییم. به غیر از عبارت ثابت مربوط به $n=0$ اولین مؤلفه فوریه به ازای $n=1$ به دست می آید که دوره نوسان

آن $T=\frac{2\pi}{\omega}$ است. دورهٔ نوسان مؤلفهٔ فوریه‌ای کمتر

صحیحی از همین دوره است، برای مؤلفهٔ n ام دورهٔ نوسان

$\frac{2\pi}{n\omega}=\frac{T}{n}$ است؛ بنابراین پس از طی شدن زمان T کلیه مؤلفه‌های

فوریه‌ای تکرار می‌شوند و عبارت $F(t)=\sum_n F_n \cos(n\omega t+\varphi_n)$ یک

تابع دوره‌ای از زمان با دورهٔ $\frac{2\pi}{\omega}$ است.

قضیه معروف فوریه که شکل تفصیلی آن را در فصل 1 معرفی

کردیم عکس این موضوع را نشان می‌دهد. فرض کنیم $F(t)$ تابعی دوره‌ای

~~با تغییر متغیر $\theta=\omega t$ از روابط ... و ...~~

دلخواه با پریود T باشد. می‌توان ~~با تغییر متغیر~~ تابع $F(t)$ را به صورت زیر نشان داد:

$$\cancel{F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\omega t)\right)+\beta_n\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\omega t)\right)\right]+\alpha_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}$$

$$F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t\right]+A_0 \qquad (۱۶۰-٤)$$

که در آن

$$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad , \quad A_0=\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt$$

$$B_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)\,dt \qquad (۱۶۱-٤)$$

برای به دست آوردن روابط (٤-۱۶۰) و (٤-۱۶۱) کافی است به جای θ

در روابط ۱- ... و ... فصل یک ωt را قرار دهیم و ~~به جای~~

جایگزینی $\frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}}\to A_n$ و $\frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}}\to B_n$ و $\frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}}\to A_0$ را در آنها انجام

دهیم. به ازای هریک از n ها در رابطه (٤-۱۶۰) می‌توان به جای

مجموع $A_n\cos(n\omega t)+B_n\sin(n\omega t)$ از یک عبارت کسینوس یا سینوس با فاز استفاده کرد و آن را به شکل $F_n\cos(n\omega t+\varphi_n)$ نوشت:

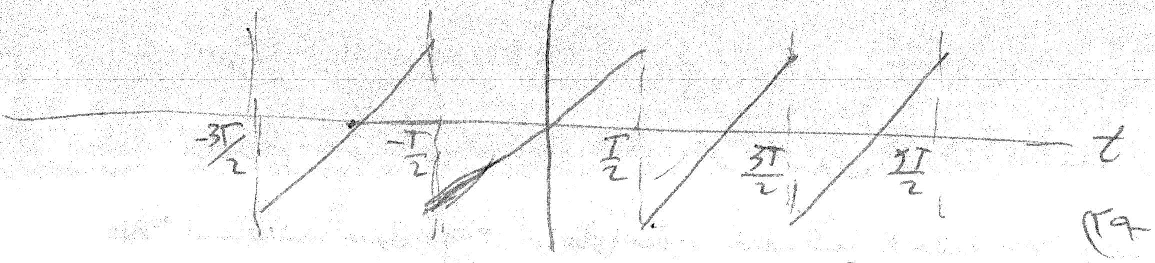
$$F(t)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cos(n\omega t+\varphi_n) \qquad (۱۵۲-۴)$$

که رابطه تبدیل آنها از $A_n=F_n\cos\varphi_n$ و $B_n=-F_n\sin\varphi_n$ حاصل می‌شود.

یک نکته حائز اهمیت آن است که سری فوریه منحصر به توابع ادواری پیوسته نیست و حتی می‌توان آن را برای توابعی که تکه تکه پیوسته‌اند نیز به کار برد. مثال زیر این مطلب را بهتر نشان می‌دهد.

مثال - تابع دندانه اره‌ای -

تابع خطی $F(t)=At$ را در بازه‌ی $-\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}$ در نظر بگیرید. از تکرار این تابع در بازه‌های بعدی $[\frac{T}{2},\frac{3T}{2}]$ و ... و بازه‌های قبلی $[-\frac{3T}{2},-\frac{T}{2}]$ و ... مطابق شکل (۴-۲۹) تابع دندانه اره‌ای تولید می‌شود



شکل (۴-۲۹)

چنانکه می‌بینیم تابع $F(t)$ تکه تکه پیوسته است و کاملاً پیوسته نیست. از روابط (۴-۱۵۱) ضرایب سری فوریه تابع $F(t)$ را به این ترتیب به دست می‌آوریم

$$A_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}At\,dt=0 \quad , \quad A_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}At\cos n\omega t\,dt=0 \qquad (۱۵۳-۴)$$

$$B_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}At\sin(n\omega t)\,dt=\frac{A}{T}\frac{1}{(-n\omega)}\int_{-T/2}^{T/2}t\,d(\cos n\omega t)$$

$$= -\frac{A}{n(2\pi)}\left\{ t\cos n\omega t \Big|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} \cos n\omega t \, dt \right\}$$

$$= -\frac{A}{2\pi n}\left\{ (-1)^n T - 0 \right\}$$

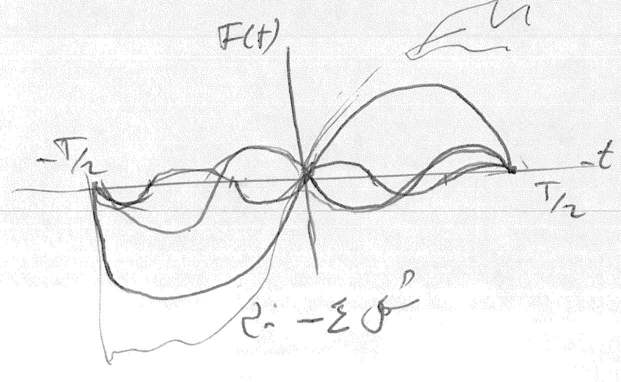
$$= \frac{A}{n\omega}(-1)^{n+1} \qquad (۱۶۴-۴)$$

صفر شدن ضرایب A_0 و A_n در سطر نخست بدون محاسبه و به دلیل فرد بودن انتگرالده روی بازه متقارن $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ قابل دیدن است. به این ترتیب سری فوریه تابع دندانه اره‌ای به صورت زیر به دست می‌آید

$$F(t) = \sum_n \frac{A}{n\omega}(-1)^{n+1}\sin n\omega t$$

$$= \frac{A}{\omega}\left[\sin\omega t - \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right] \qquad (۱۶۵-۴)$$

در شکل (۴-۵۰) سه مؤلفه نخست سری فوریه و مجموع آنها رسم شده‌اند.

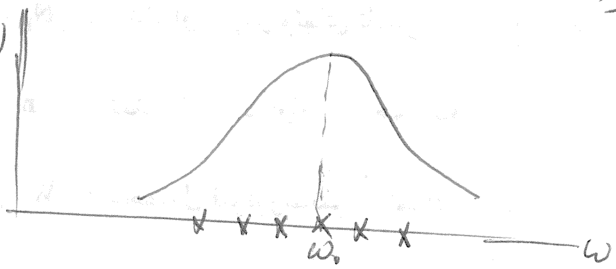


شکل ۴-۵۰

اگر بر تعداد مؤلفه‌های فوریه در این شکل بیفزاییم به تدریج و با بالا رفتن تعداد منحنی حاصل بیشتر و بیشتر به تابع دندانه اره‌ای شبیه می‌شود.

وقتی یک نیروی واداشته دوره‌ای که شامل مؤلفه‌های فوریه‌ای و یا باصطلاح "هارمونیک" های مختلف است به نوسانگر اعمال می‌گردد با توجه به معادلات (۴-۱۵۸) و (۴-۱۵۹) پاسخ نوسانگر به هارمونیک های مختلف یکسان نیست. از بی‌شمار هارمونیک اعمال شده فقط آنهایی که بسامدشان نزدیک بسامد طبیعی دستگاه باشد با دامنه بزرگ پاسخ می‌گیرند. اگر عامل کیفیت دستگاه بزرگ و میرایی آن کم باشد

این امکان وجود دارد که فقط یکی از هماهنگ ها پاسخ قابل توجه داشته باشد.
با توجه به اینکه بازه بسامد بین هر دو هماهنگ متوالی ω است که برای اینکه
نوسانگر فقط یک هماهنگ را برگزیند آن است که عرض منحنی تشدید از
ω بسیار کمتر باشد، یعنی $\omega \gg \lambda$. مثلاً فرض کنید بسامد طبیعی یک
نوسانگر 200Hz و بسامد نوسان واداشته غیرسینوسی اعمال شده بر آن
40Hz باشد. در اینجا بسامد هماهنگ پنجم نیروی واداشته با بسامد طبیعی
دستگاه منطبق است. و تنها این هماهنگ با دامنه بزرگ نوسان خواهد
کرد. اگر میرایی چنان باشد که عرض منحنی تشدید چند ~~بسامد~~ تا از
بسامدهای هماهنگ ها را دربرگیرد، آن چند هماهنگ با دامنه بزرگ



شکل (۴-۲۱)

نوسان می کنند. مثلاً در شکل (۴-۲۱) عرض منحنی تشدید به اندازه ای است که کلیه هماهنگ هایی که با علامت x روی محور ω نشان داده شده را دربر می گیرد. این هماهنگ ها در پاسخ نوسانگر دامنه بزرگتری دارند.

— نیروی واداشته ثابت، پله ای و ضربه ای

در این قسمت معادله نوسانگر هماهنگ میرا را برای سه نیروی ثابت، پله ای و ضربه ای بررسی می کنیم. برای نیروی ثابت F معادله حرکت نوسانگر چنین است

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F=\text{ثابت} \qquad (۴-۱۹۹)$$

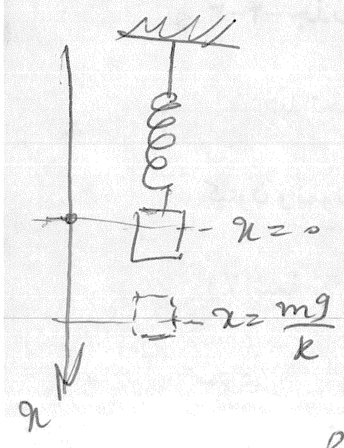
برای $F=0$ حل عمومی معادله حرکت هماهنگ طبق معمول از رابطه (۴-۱۹۴)

و یا (۴-۹۶) به دست می‌آید. کافی است حل خاص معادله غیرهمگن (۴-۱۳۶) را به آن بیفزاییم. با اندکی دقت می‌توان دید که این حل خاص از نوع «ثابت $x=$» می‌تواند باشد. برای چنین حلی جملات $m\ddot{x}$ و $\dot{x}$ صفر است و جواب $x=F/k$ است. به این ترتیب کلی‌ترین حل دستگاه به صورت زیر است

$$x = F/k + e^{-\gamma t}\left(A_1\cos\omega_1 t + A_2\sin\omega_1 t\right) \qquad (۴-۱۳۷)$$

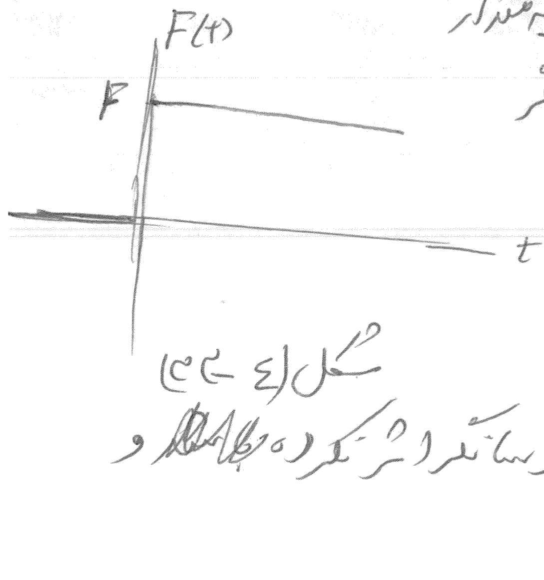
ثابت‌های A_1 و A_2 از شرایط اولیه دستگاه به دست می‌آید. با کمی دقت در حل (۴-۱۳۷) روشن است که $x'=x-F/k$ از معادله نوسانگر هماهنگ میرای غیرواداشته تبعیت می‌کند. تنها تفاوت آن است که نقطه تعادل دستگاه به جای $x=0$ در $x=+F/k$ قرار می‌گیرد که با $x'=0$ مترادف است.

یک مثال از چنین وضعیتی جرم آویخته به فنری است که از سقف آویزان است. اگر محور x را رو به پایین بگیریم، نیروی ثابت وزن نقطه تعادل دستگاه را از $x=0$ به $x=\frac{mg}{k}$ منتقل می‌کند و نوسانهای دستگاه حول این نقطه انجام می‌شود (شکل ۴-۲۳).



شکل (۴-۲۳)

حال یک نیروی واداشته پله‌ای را در نظر می‌گیریم. نمودار چنین نیرویی برحسب زمان مطابق شکل (۴-۲۴) است. این نیرو تا لحظه $t=0$ صفر است و در این لحظه ناگهان به مقدار ثابت F می‌رسد. برای زمانهای $t>0$ مسئله به نوسانگر هماهنگ واداشته با نیروی ثابت تقلیل پیدا می‌کند که حل کلی آن از نوع (۴-۱۳۷) است. اما برای زمانهای $t<0$ نیرو صفر است. اگر فرض کنیم تا قبل از اعمال نیروی واداشته هیچ اختلالی بر نوسانگر اثر نکرده و



شکل (۴-۲۴)

نوسانگر در موضع تعادل خود در حال سکون باشد، حل معادله حرکت برای $t<0$ با تابع $x=0$ مشخص است. حل باید حل (۴-۱۹۷) برای $t\geq 0$ را برای شرایط اولیه $x(0)=0$ و $\dot{x}(0)=0$ تنظیم کنیم. برای $\dot{x}(t)$ داریم

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t}\left[-\gamma(A_1\cos\omega_1 t + A_2\sin\omega_2 t) - A_1\omega_1\sin\omega_1 t + A_2\omega_1\cos\omega_1 t\right]$$

(۴-۱۹۸ قبل)

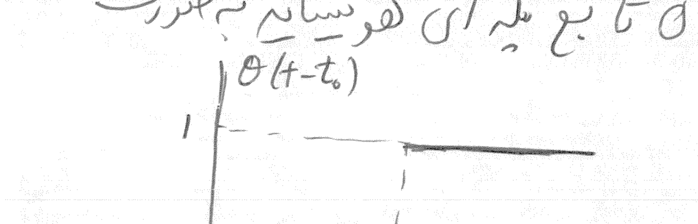
بنابراین شرایط اولیه یاد شده، ایجاب می کند که

$$\begin{cases} 0 = F/k + A_1 \\ 0 = -\gamma A_1 + A_2\omega_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = -F/k \\ A_2 = \dfrac{\gamma}{\omega_1}(-F/k) \end{array}$$

در نتیجه حل معادله حرکت برای نیروی پله‌ای شکل (۴-۴۴) چنین است

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \dfrac{F}{k}\left[1 - e^{-\gamma t}\cos\omega_1 t - \dfrac{\gamma}{\omega_1}e^{-\gamma t}\sin\omega_1 t\right] & t>0 \end{cases} \qquad (۱۹۸-۴)$$

نیروی پله‌ای نمودار شکل (۴-۴۴) را با تابع $F(t)=F\theta(t)$ نیز می‌توان نشان داد. تابع $\theta(t)$ تابع هویساید نام دارد که برای $t>0$ مقدار یک و برای $t<0$ صفر است. ~~...~~ می‌توان تابع پله‌ای را به شکل کلی‌تر $F(t)=F\theta(t-t_0)$ گرفت که در آن θ تابع پله‌ای هویساید به صورت نمودار شکل (۴-۴۴) است و با رابطه زیر داده می‌شود



شکل (۴-۴۴)

$$\theta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t<t_0 \\ 1 & t>t_0 \end{cases} \qquad (۱۹۹-۴)$$

برای نیروی پله‌ای که در لحظه $t=t_0$ به نوسانگر ساکن در نقطه تعادل اعمال شود، حل (۴-۱۹۸) را می‌توان با تبدیل $t\to t-t_0$ بازنویسی کرد. نتیجه نهایی چنین است:

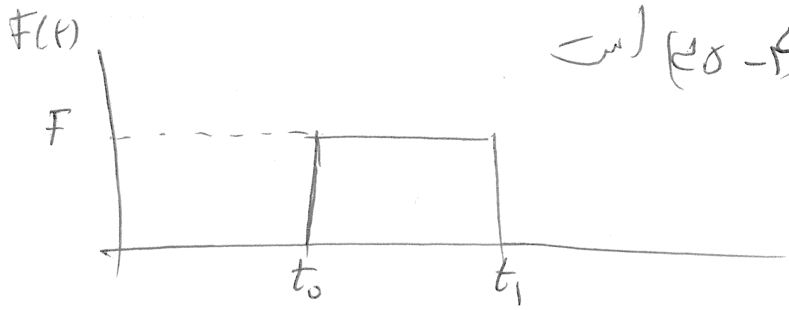
$$x(t)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ \frac{F}{k}\left[1-e^{-\gamma(t-t_0)}\cos\omega_1(t-t_0)-\frac{\gamma}{\omega_1}e^{-\gamma(t-t_0)}\sin\omega_1(t-t_0)\right] & t>t_0\end{cases}$$

(۱۷۰-۴)

نیروی ضربه‌ای را می‌توان از ترکیب دو نیروی پله‌ای به صورت زیر به دست آورد

$$F(t)=F\left(\theta(t-t_0)-\theta(t-t_1)\right) \qquad (۱۷۱-۴)$$

با استفاده از تعریف (۴-۱۶۹) می‌توان دید که نیروی $F(t)$ در رابطه (۴-۱۷۱) به صورت نمودار شکل (۴-۲۵) است



شکل (۴-۲۵)

می‌توان برای هر یک از دو تابع پله‌ای (۴-۱۷۱) جواب (۴-۱۷۰) را نوشت و با هم جمع کرد تا جواب معادله نوسانگر هماهنگ برای $F(t)$ باشد. سپس با انجام حد $t_1-t_0\to 0$ می‌توان اثر نیروی ضربه‌ای کوچک در بازه زمانی δt را به دست آورد. انجام این کار به خواننده توصیه می‌شود.

در اینجا روش مستقیم‌تری را به کار می‌بریم. فرض کنید نوسانگری که در نقطه تعادل ساکن قرار گرفته و در مدت زمان بسیار کوتاهی تحت اثر نیروی ضربه‌ای $F(t)$ ضربه $P=\int_0^{\delta t}F(t)\,dt=F\delta t$ می‌بیند و سرعتش ناگهان از صفر به $v_0=\frac{F\delta t}{m}$ می‌رسد. تا قبل از ضربه حل مسئله، حل سکون یعنی $x=0$ است. اما برای زمان‌های $t>0$ کافی است حل

کمی نوسانگر هماهنگ میرا داشته یعنی روابط (۴-۹۴) را برای شرایط

اولیه $x(0)=0$ و $v(0)=v_0$ بنویسیم با استفاده از روابط (۴-۹۴) و

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left[A_1\cos\omega_1 t + A_2\sin\omega_1 t\right] \\ v(t) &= e^{-\gamma t}\left[-\gamma\left(A_1\cos\omega_1 t + A_2\sin\omega_1 t\right) - A_1\omega_1 \right. \end{aligned}}$$

(۴-۱۶۸) قبل برای $x(t)$, $v(t)$ داریم

$$\begin{cases} 0 = x(0) = A_1 \\ v_0 = v(0) = -\gamma A_1 + A_2\omega_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= \frac{v_0}{\omega_1} = \frac{F\delta t}{m\omega_1} \end{aligned}$$

به این ترتیب حل معادله نوسانگر هماهنگ برای نیروی ضربه‌ای که در لحظه $t=0$

نواخته می شود به صورت زیر است

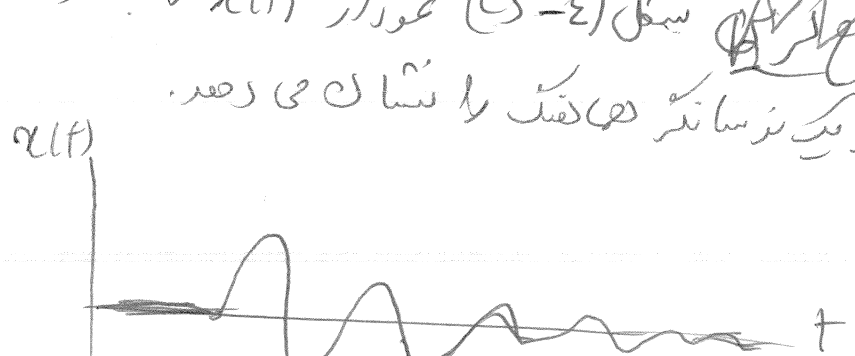
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \dfrac{F\delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma t}\sin\omega_1 t & t>0 \end{cases} \qquad (۴-۱۷۳)$$

اگر ضربه در لحظه معین t_0 نواخته شود پاسخ نوسانگر چنین است

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t<t_0 \\ \dfrac{F\delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_0)}\sin\omega_1 (t-t_0) & t>t_0 \end{cases} \qquad (۴-۱۷۴)$$

شکل (۴-۲۶) نمودار $x(t)$ رابطه (۴-۱۷۴) برای

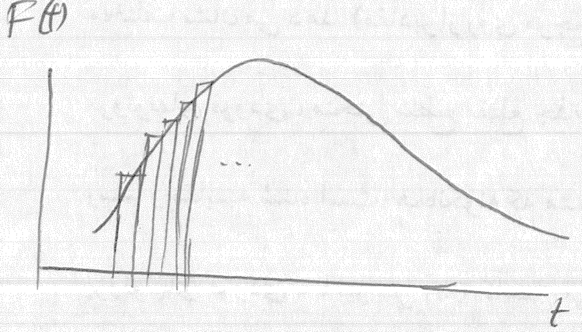
اثر نیروی ضربه به این جور یک نوسانگر هماهنگ را نشان می دهد.



شکل ۴-۲۶

— روش تابع گرین

در این بخش می‌خواهیم با استفاده از نتیجه بخش قبل برای نیروی ضربه‌ای پاسخ نوسانگر را به یک نیروی دلخواه بیابیم. از رهگذر این محاسبه به روش ریاضی بسیار مهمی دست خواهیم یافت که به روش تابع گرین موسوم است و در زمینه‌های بسیاری از فیزیک کاربرد دارد.



شکل ۴-۳۷

فرض کنید نوسانگر تحت اثر نیروی دلخواهی قرار دارد که نمودار بستگی آن به زمان در شکل (۴-۳۷) نشان داده شده است. می‌توانیم زمان را به بازه‌های کوچک δt تقسیم کنیم و در هر زمان نیرو را تقریباً ثابت بگیریم. اگر δt به صفر میل کند این تقریب کاملاً دقیق خواهد شد. حال می‌توانیم فرض کنیم

$$F(t) = \sum F_n(t) \qquad (۱۷۴-۴)$$

که در آن، با فرض $t_n = n\delta t$ داریم

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & t < n\delta t \\ F(t_n) & n\delta t < t < (n+1)\delta t \\ 0 & t > (n+1)\delta t \end{cases} \qquad (۱۷۵-۴)$$

این کار به این معنی است که نیروی $F(t)$ را به مجموعه‌ای از نیروهای ضربه‌ای تقسیم کرده‌ایم. طبق آنچه در بخش (۴-...؟) و بعد از رابطه (۴-۱۵۴) دیدیم اگر $x_n(t)$ پاسخ نوسانگر به نیروی ضربه‌ای $F_n(t)$ باشد، $\sum x_n(t)$ پاسخ دستگاه به نیروی $F(t)$ خواهد بود. بنابراین می‌توان نوشت

$$x(t) = \sum x_n(t) = \sum_n \begin{cases} 0 & t < t_n \\ \dfrac{F(t_n)\,\delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_n)} \sin\omega_1(t-t_n) & t > t_n \end{cases}$$

فرمول قبلی

$$= \sum_{t_n<t} \frac{F(t_n)\,\delta t}{m\omega_1}\, e^{-\gamma(t-t_n)} \sin\omega_1(t-t_n) \qquad (۱۷۶-٤)$$

در رسیدن از خط اول به خط دوم رابطه (٤-۱۷۶) به این نکته دقت کرده‌ایم که برای یک لحظه دلخواه t، تنها $x(t)$ فقط شامل اثر نیروهای ضربه‌ای است که تا قبل از آن لحظه اثر کرده‌اند. حال اگر δt را به صفر میل دهیم علامت جمع در رابطه (٤-۱۷۶) به انتگرال تبدیل می‌شود و حاصل چنین است

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, \frac{F(t')}{m\omega_1}\, e^{-\gamma(t-t')} \sin\omega_1(t-t') \qquad (۱۷۷-٤)$$

در اینجا متغیر انتگرال‌گیری یعنی t' به جای متغیر t_n که به شمارنده n بازه زمانی مربوط بود آمده است. در فرض $t_n = n\delta t$ فرض کرده‌ایم که $n=0$ با زمان $t'=0$ متناظر است. شمارنده بازه‌ها یعنی n می‌تواند به مقادیر منفی نیز گسترش یابد که حاکی از زمان‌های منفی است.

رابطه (٤-۱۷۷) را به صورت زیر نیز می‌توانیم بنویسیم

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t,t')\, F(t') \qquad (۱۷۸-٤)$$

که در آن $G(t,t')$ تابع گرین نوسانگر هماهنگ نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G(t,t') = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin\omega_1(t-t') & t'<t \\ 0 & t'>t \end{cases} \qquad (۱۷۹-٤)$$

با استفاده از تابع پله‌ای هویساید (تابع (٤-۱۶۹)) G را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$G(t,t') = \theta(t'-t)\, \frac{1}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin\omega_1(t-t') \qquad (۱۸۰-٤)$$

وجود تابع پله‌ای در عبارت $G(t,t')$ حاکی از آن است که نوسانگر در لحظه t فقط اثر نیروی وادارنده را در لحظه‌های قبل، یعنی زمانهای $t'<t$ حس می‌کند. اثر $F(t')$ برای $t'<t$ در $x(t)$ عبارت

$$dt' \frac{1}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin\omega_1(t-t') F(t') \qquad (۱۸۱-۴)$$

است که جمع این اثرها انتگرال (۱۷۸-۴) خواهد شد.

ایده‌ای که در بطن رابطه (۱۷۸-۴) نهفته است بسیار مهم است، در اینجا می‌توانیم نیروی وادارنده را به عنوان یک چشمه اختلالات و یا چشمه - تاثیرات بر روی کمیت فیزیکی $x(t)$ در نظر بگیریم. مقدار این چشمه در t' های مختلف می‌تواند روی متغیر فیزیکی x در لحظه t اثر بگذارد. تابع گرین این تاثیر را بیان می‌کند. به بیان دیگر $G(t,t')dt'$ اثر چشمه واحد در بازه زمانی dt' در لحظه t' بر متغیر فیزیکی x در لحظه t بیان می‌کند. برای چشمه دلخواه باید این را در $F(t')$ ضرب کرد و حاصل را برای همه چشمه‌ها جمع کرد.

مفهوم فوق به چشمه‌های وابسته به زمان محدود نیست و آن را برای چشمه‌های وابسته به مکان یا چشمه‌های وابسته به مکان و زمان همراه نیز می‌توان به کار برد. مثلاً در الکترواستاتیک چگالی بار الکتریکی $\rho(\vec{x}')$ در نقطه $\vec{x}'$ از فضا چشمه پتانسیل الکتریکی $\Phi(\vec{x})$ در نقطه $\vec{x}$ است. رابطه چشمه - میدان را (یعنی میدان اسکالر مورد نظر) می‌توان به شکل اثر یک تابع گرین به شکل زیر نوشت

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x' \, G(\vec{x},\vec{x}') \rho(\vec{x}') \, d^3x' \qquad (۱۸۲-۴)$$

که در آن

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \qquad (۱۸۳-۴)$$

در اینجا $\frac{1}{|x-x'|}$ را ~~[illegible]~~ اثر بار واحد واقع در نقطه x' در اینجا دتپانسیل الکتریکی در نقطه x گرفت. برای بار $\rho(x')d^3x'$ باید این مقدار بار را در اثر بار واحد ضرب کرده. جمع بندی این اثرات همان انتگرال (۱۸۲-۴) را رقم می‌زند.

در اینجا با توجه به خواص تابع دلتای دیراک به جنبه بسیار مهم دیگری از توابع گرین می‌پردازیم. رابطه چشمه-متغیر و یا چشمه-میدان (در حالتی که متغیرهای دینامیکی ما میدانهای روی فضا یا فضا-زمان باشند) معمولاً به شکل یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن است که به طور نمادین آن را به شکل زیر می‌نویسیم

$$T\phi = \rho \qquad (۱۸۴-۴)$$

در اینجا T یک عملگر دیفرانسیلی خطی (شامل مشتقات نسبت به متغیرهای زمانی، فضایی و یا فضا-زمانی) است و ρ چشمه این متغیر یا میدان ϕ است. اگر فرض کنیم ρ و ϕ بردارهایی از یک فضای برداری و T یک عملگر خطی روی این فضای برداری ~~[illegible]~~ و معکوس پذیر باشد، حل معادله (۱۸۴-۴) علی الاصول به صورت زیر است

$$\phi = T^{-1}\rho \qquad (۱۸۵-۴)$$

که T^{-1} معکوس عملگر T است و رابطه $TT^{-1}=1$ را ارضا می‌کند. ~~[illegible]~~ حال اگر ρ و ϕ توابعی از متغیرهای فضایی و زمانی به صورت ~~[illegible]~~ نمادین $\rho(y)$ و $\phi(y)$ باشند (که y می‌تواند متغیرهای فضایی یا زمانی یا هر دو باشد) رابطه (۱۸۴-۴) را باید به صورت نمادین

زیر نوشت

$$\Phi(y)=\int G(y,y')\,\rho(y')\,dy' \qquad (۴-۱۸۶)$$

تابع $G(y,y')$ نقشی مشابه T^{-1} در رابطه (۴-۱۸۵) را ایفا می‌کند و رابطه $TT^{-1}=1$ در این حالت به صورت زیر در می‌آید

$$TG(y,y')=\delta(y-y') \qquad (۴-۱۸۷)$$

که $\delta(y-y')$ تابع دلتای دیراک است. (معرفی و خواص تابع دلتای دیراک را در ضمیمه A ببینید) برای متغیرهای سه گانه فضایی دلتای فوق به صورت $\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ و برای متغیر زمان به صورت $\delta(t-t')$ است.

برای اینکه ببینیم تابع $\Phi(y)$ در رابطه (۴-۱۸۶) پاسخ معادله (۴-۱۸۴) است کافی است روی طرفین آن عملگر خطی T را اثر دهیم:

$$\begin{aligned} T\Phi(y) &= \int TG(y,y')\,\rho(y')\,dy' \\ &= \int \delta(y-y')\,\rho(y')\,dy' \\ &= \rho(y) \end{aligned} \qquad (۴-۱۸۸)$$

رابطهٔ (۴-۱۸۷) اساسی ترین خاصیت تابع گرین است. هر عملگر دیفرانسیلی خطی تابع گرین خاص خود را دارد که البته منحصر به فرد هم نیست. اگر داشته باشیم

$$G'(y,y')=G(y,y')+F(y,y') \qquad (۴-۱۸۹)$$

که در آن

$$TF(y,y')=0 \qquad (۴-۱۹۰)$$

در این صورت $G'(y,y')$ نیز رابطه (۴-۱۸۷) را برآورده می‌کند. در مسایل

سه بعدی و یا بالاتر می توان با اعمال شرایط مرزی خاص از بین توابع گرین مختلف یک عملگر آن که شرایط مورد نظر را دارد برگزید. جزئیات بیشتر در این مورد از حوصله این بحث خارج است.

در مورد خاص مسئله الکترواستاتیک معادله ای که مشابه به (۴-۱۸۴) باشد معادله پواسون است که رابطه چگالی بار الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در هر نقطه فضا را به صورت زیر بیان می کند

$$\nabla^2 \Phi(x) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x) \qquad (۴-۱۹۱)$$

تابع گرین عملگر لاپلاسی ∇^2 مطابق رابطه (۴-۱۸۷) و با اندکی تغییر در ضرایب به صورت $\frac{1}{|x-x'|}$ است که در رابطه زیر صدق می کند

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|x-x'|}\right) = -4\pi\,\delta^3(x-x') \qquad (۴-۱۹۲)$$

برای اثبات رابطه فوق به کتابهای الکترومغناطیس (از جمله .....) مراجعه کنید. حال روشن است که اگر عملگر ∇^2 را روی طرفین معادله (۴-۱۸۳) بزنیم خواهیم داشت

$$\cancel{\nabla^2\left\{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(x')\,d^3x'}{|x-x'|}\right\}}$$

$$\nabla^2\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla^2\left(\frac{1}{|x-x'|}\right)\rho(x')\,d^3x'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int (-4\pi)\,\delta^3(x-x')\,\rho(x')\,d^3x'$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x) \qquad (۴-۱۹۳)$$

حال برگردیم به مسئله نوسانگر هارمونیک با نیروی واداشته $F(t)$ و

تابع گرین مربوط به آن که در رابطه (۴-۱۸۰) معرفی شد. یک بار دیگر معادله نوسانگر هماهنگ واداشته با نیروی واداشته دلخواه $F(t)$ را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$L\, x(t) = F(t) \qquad (۴-۱۹۴)$$

که در آن

$$L = m\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + k \qquad (۴-۱۹۵)$$

اگر نشان دهیم تابع گرین (۴-۱۸۰) در معادله اساسی توابع گرین به صورت زیر

$$\left(m\frac{d^2}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + k\right) G(t,t') = \delta(t-t') \qquad (۴-۱۹۶)$$

صدق می‌کند، آنگاه بنا بر استدلال کلی که گفته شد (در رابطه (۴-۱۸۸)) روشن است که $x(t)$ از معادله (۴-۱۷۸) حل معادله (۴-۱۹۴) است. تابع گرین (۴-۱۸۰) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$G(t,t') = \theta(t-t')\, g(t-t') \qquad (۴-۱۹۷)$$

که در آن

$$g(t-t') = \frac{1}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin\omega_1(t-t') \qquad (۴-۱۹۸)$$

برای محاسبهٔ سمت چپ رابطه (۴-۱۹۶) البته اثر مشتقات زمانی را روی $G(t,t')$ از رابطه (۴-۱۹۷) حساب می‌کنیم. داریم

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t-t')g\right] = \delta(t-t')g + \theta(t-t')\dot{g} \qquad (۴-۱۹۹)$$

این بخش به عنوان ضمیمه آخر کتاب می آید

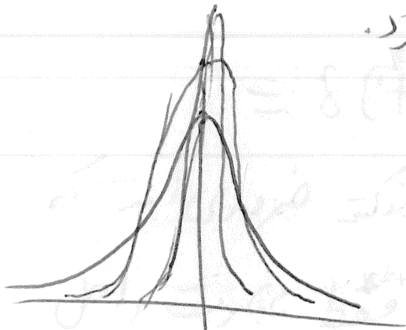
ضمیمه A - دلتای دیراک

یک رسته تابع $\delta_\alpha(x)$ با خاصیت های زیر در نظر بگیرید

الف - $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\alpha(x)\, dx = 1$ (1-A)

ب - به ازای مقدار حدی معین α_0 برای α می توان اندازه $\delta_\alpha(x)$ را جز در نقطه $x=0$ از هر مقدار معین ϵ کوچکتر کرد.

شکل (1-A) شمایی از ترازهای $\delta_\alpha(x)$ را نشان می دهد.



شکل (1-A)

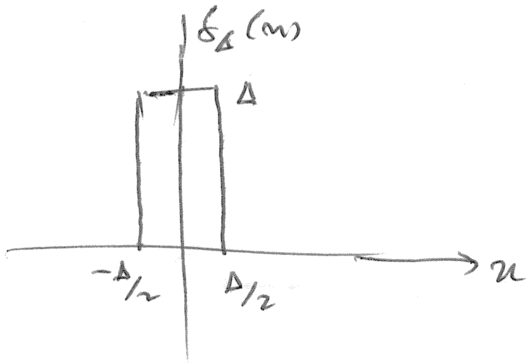
روشن است که رسته تابع $\delta_\alpha(x)$ باید در $x \to \pm\infty$ به صفر میل کند. این توابع حول و حوش $x=0$ مقدار بزرگ دارند و با دور شدن از آن به صفر میل می کنند. هرچه α به α_0 نزدیک تر شود عرض $\delta_\alpha(x)$ کوچکتر و ارتفاع قلهٔ آن بزرگتر می شود اما بنابه خاصیت (1-A) انتگرال زیر آن همواره برابر با یک باقی می ماند. در حالت حدی $\alpha \to \alpha_0$ توابع مذکور به تابعی میل می کنند که همه جا صفر و در $x=0$ نامتناهی است و انتگرال آن روی بازه ای که شامل $x=0$ است برابر واحد است.

مثال ۱ - تابع گوسی زیر را درنظر بگیرید

$$\delta_\alpha(x) = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{4x^2}{\alpha^2}} \qquad (2\text{-}A)$$

این تابع بیشینه ای در $x=0$ به اندازه $\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}$ دارد و عرض آن α است. شکل تابع مشابه یکی از شکل های (1-A) است و انتگرال آن با توجه به فرمول

منحنی زیر $\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}$ مستقل از α و برابر یک است. در حد $\alpha \to 0$ تابع $\delta_\alpha(x)$ به دلتای دیراک میل می‌کند.



(2-A)

مثال ۲- تابع $\delta_\Delta(x)$ در شکل (2-A) را در نظر بگیرید که نمایش ریاضی آن به صورت زیر است

$$\delta_\Delta(x)=\begin{cases}\Delta & |x|<\frac{\Delta}{2}\\ 0 & |x|>\frac{\Delta}{2}\end{cases} \qquad (3-A)$$

انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\Delta(x)\,dx$ برابر یک است. هرچه Δ به صفر میل کند $\delta_\Delta(x)$ باریکتر و درازتر می‌شود و در حالت حدی $\Delta \to 0$ یک سوزن نامتناهی در $x=0$ است. بنابراین در اینجا نیز

$$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(x)=\delta(x)$$

با تغییر متغیر $x'=x-x_0$ می‌توان دید که تابع $\delta(x')=\delta(x-x_0)$ همه جا جز در $x=x_0$ صفر است و در $x=x_0$ نامتناهی است.

خاصیت اصلی تابع $\delta(x-x_0)$ را در محاسبهٔ زیر می‌توان دید

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,dx$$

$$= f(x_0) \qquad (4-A)$$

در سطر اول از محاسبهٔ فوق به این نکته توجه کرد. این که $\delta(x-x_0)$ همه جا جز در x_0 صفر است بنابراین کافی است $f(x)$ را $f(x_0)$ بگیریم و آن را از انتگرال بیرون بیاوریم. رابطهٔ (4-A) خاصیت اصلی تابع دلتای دیراک است. این تابع فقط تحت انتگرال معنی می‌دهد و اثر انتگرال‌گیری

روی آن مقدار $f(x)$ را در نقطهٔ x_0 یعنی نقطه ای که آرگومان تابع دلتا برای آن صفر است، می دهد. انتگرال گیری روی تابع دلتای دیراک در یک

حاصلضرب

تابع پیوسته درست شبیه جمع زنی روی حاصلضرب دلتای کرونکر در یک بردار است. به شباهت روابط زیر توجه کنید

$$\sum_j \delta_{ij} A_j = A_i \qquad (5-A)$$

$$\int dx' \, \delta(x-x') f(x') = f(x)$$

متغیرهای پیوسته x و x' شبیه اندیس های سطری و ستونی i و j رفتار می کنند. جمع زنی روی شاخص ناپیوسته j شبیه انتگرال گیری روی متغیر پیوسته x' است. کمیت های δ_{ij} که صفر یا یک هستند درایه های عملگر واحد بر روی یک فضای برداری محدود بعد به شمار می روند. به همین ترتیب $\delta(x-x')$ نیز مشابه به نمایش ماتریسی عملگر واحد در یک فضای برداری تابعی نامحدود است. (به مشابهت رابطه (۱۸۷-۴) در بعد نامتناهی یا رابطه $TT^{-1}=1$ دقت کنید).

خواص تابع دلتای دیراک

۱- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\, dx = 1$$

۲- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$$

۳- $$\delta(x) = \delta(-x)$$

۴- $$\delta[a(x-x_0)] = \frac{1}{|a|} \delta(x-x_0)$$

$$\int \delta'(x-x_0) f(x)\, dx = -f'(x_0)$$

$$\delta[g(x)] = \sum_{x_i} \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x-x_i)$$

در آخرین رابطه x_i ها ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند.

خواص ۱و۲ در متن بیان شدند. خاصیت ۵ نیز بنا به تعریف تابع دلتا واضح است. تابع دلتا در دو طرف $x=0$ صفر است و فقط در $x=0$ غیر صفر است. بنابراین تحت تبدیل $x \to -x$ تقارن دارد.

در بسیاری موارد از جمله دو مثالی که در متن آمد دسته توابعی که تابع $\delta(x)$ حد آنهاست، یعنی توابع $\delta_\alpha(x)$ زوج در نظر گرفته می‌شوند.

برای اثبات خاصیت ۴ با فرض $a>0$ به محاسبه زیر دقت کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(ax-ax_0)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x'}{a}\right) \delta(x'-x'_0) \frac{dx'}{a}$$

$$= \frac{1}{a} f\left(\frac{x'_0}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} f(x_0)$$

که در آن از تغییر متغیر $x'=ax$ استفاده کرده‌ایم. از نتیجه فوق داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[a\delta(ax-ax_0)\right] dx = f(x_0)$$

بنابراین

$$a\delta(ax-ax_0) = \delta(x-x_0)$$

دقت کنید که برای $a>0$ تحت تغییر متغیر $x'=ax$ جای دو سر انتگرال

عوض نمی‌شود و کماکان از $-\infty$ تا ∞ است. اما اگر $a<0$ جای $-\infty$ و $+\infty$ در دو سر انتگرال عوض می‌شود و یک علامت $(-)$ در نتیجه ضرب می‌شود. به این ترتیب علامت قدر مطلق در $|a|$ برای خاصیت چهارم توجیه می‌شود.

خاصیت پنجم نیز از خاصیت چهارم قابل استنتاج است. فرض کنید تابع $g(x)$ فقط یک ریشه در $x=x_1$ داشته باشد. در این صورت طبق معمول تابع دلتا فقط در جایی که آرگومان آن صفر است یعنی در نزدیکی x_1 معنی دار است. بنابراین می‌توان بسط تیلور $g(x)$ را نزدیکی $x=x_1$ گرفت و فقط جمله اول آن را نگه داشت. داریم

$$
\begin{aligned}
g(x) &\cong g(x_1) + g'(x_1)(x-x_1) \\
&= g'(x_1)(x-x_1)
\end{aligned}
$$

که در آن از ریشه بودن x_1 استفاده کرده‌ایم و $g(x_1)$ را صفر گذاشته‌ایم. حال از خاصیت چهارم داریم

$$
\begin{aligned}
\delta[g(x)] &= \delta[g'(x_1)(x-x_1)] \\
&= \frac{1}{|g'(x_1)|}\delta(x-x_1)
\end{aligned}
$$

اگر تابع $g(x)$ چند ریشه داشته باشد، همین اتفاق در نزدیکی هر یک از ریشه‌ها می‌افتد و جمعی از عبارتهای فوق را خواهیم داشت.

دقت کنید که در هر محاسبهٔ معین فقط یکی از دلتاها می‌تواند مؤثر باشد و هرگز دو دلتا در دو جای مختلف با هم نمی‌توانند اثر کنند.

سرانجام برای اثبات خاصیت ششم یک انتگرال‌گیری جزء به

جزء لازم است:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d}{dx}\delta(x-x_0)\right] f(x)\,dx \;\; \cancel{\delta(x-x_0) f}$$

$$= \delta(x-x_0) f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \delta(x-x_0)\left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

$$= 0 - \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

در سطر دوم از محاسبهٔ فوق جملات مرزی صفرند، زیرا تابع $\delta(x-x_0)$ در $\pm\infty$ صفر است. نتیجه نهایی همان خاصیت فوق را بیان می‌کند. چنانکه می‌بینیم مشتق تابع دلتا شبیه عملگری است که وقتی به صورت انتگرالی روی یک تابع اثر می‌کند مشتق آن را (با علامت منفی) در نقطه‌ای که آرگومان δ صفر است به دست می‌دهد.

پایان ضمیمه A

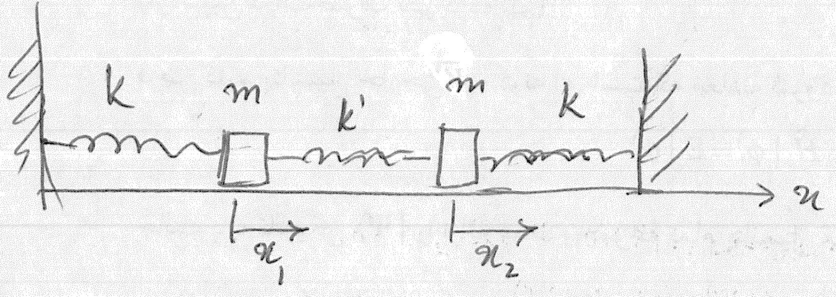
– نوسانگرهای جفت شده

پیش از این در فصل سوم درباره مفهوم جفتیدگی صحبت کردیم. اگر معادلات حرکت برای دو یا چند متغیر مستقل از هم باشند، یعنی هر متغیر معادله حرکت خاص خود را داشته باشد دستگاه غیرجفتیده است. برعکس، دستگاهی را جفتیده می‌گوییم که معادلات حرکت متغیرهای آن درهم قفل‌ها باشند؛ یعنی در معادله حرکت هر متغیر، سایر متغیرها نیز حضور داشته باشند.

در مورد نوسانگرها نیز، آنها را جفتیده می‌گوییم اگر معادله حرکت هر نوسانگر حاوی جا به جایی سایر نوسانگرها از موضع تعادل‌شان نیز باشد. این توصیف البته جنبه ریاضی مسئله را نشان می‌دهد. در مورد خاص نوسانگرهای جفتیدگی، چنانکه خواهیم دید، کاملاً محتوا و مضمون فیزیکی دارد و به عوامل پیوندی خاصی که حرکت اجسام را به هم متصل می‌کند مربوط می‌شوند. مثلاً اگر یک فنر یا نوعی برهم‌کنش باعث شود که جا به جایی یک جسم نوسان کننده بر روی حرکت اجسام همجوار آن اثرگذار باشد، آنها را جفتیده می‌نامیم و آن فنر یا عامل برهم‌کنش را عامل جفتیدگی می‌نامیم.

در این بخش با بررسی تفصیلی یک مثال تمام ایده جفتیدگی و شیوه اساسی حل مسئله نوسانگرهای جفت شده را ارائه می‌کنیم. روش‌ها در این فصل بر مبنای مکانیک نیوتنی است. در فصل‌های بعدی و پس از یادگیری مکانیک لاگرانژی یک بار دیگر به مسئله

جفت‌شدگی بررسی کردیم و ~~سپس~~ تحلیل کلی تری برای دستگاههای جفتیده ارائه می‌کنیم.



شکل (۴-۲۸)

در شکل (۴-۲۸) دستگاهی متشکل از دو ~~جسم~~ نوسان کننده با جرم های برابر m نشان داده شده که هر کدام با فنری به ضریب k به دیواره های سمت چپ و راست دستگاه متصل اند. بین دو جسم فنری به ضریب k' قرار داده‌ایم که عامل جفتیدگی دو نوسانگر است. اگر این فنر نباشد هر کدام از دو نوسانگر مستقل از هم حرکت می‌کنند و ممکن است هر دامنه و فاز دلخواهی داشته باشند. معادلات حرکت نیز در این حالت مجزا از هم است. اما با وجود فنر k' دیگر چنین نیست. فنر k' باعث می‌شود حرکت هر کدام از نوسانگرها بر روی دیگری اثرگذار باشد.

معمولاً برای توصیف حرکت نوسانگرهای جفتیده بهتر است مختصه یا مختصات هر کدام از آنها را از وضعیت تعادل آنها بسنجیم. مثلاً در شکل (۴-۲۸) به جای آن که مختصات جرم‌ها را از یک مبدأ واحد روی محور x بسنجیم، نسبت به مبدأهای متفاوتی که در واقع نقاط تعادل هر یک از جرم‌هاست می‌سنجیم. اگر لازم باشد بعداً می‌توانیم با افزودن فاصله نقطه‌های تعادل از یک مبدأ مشخص (مثلاً دیواره سمت چپ) به مختصات معرفی شده، به مختصات معمولی آنها ~~...~~ می‌

ببینیم. در شکل (۴-۱۴) مختصات x_1 و x_2 جابجایی جرم ها نسبت به نقطه تعادل هرکدام را نشان می دهد. اگر برای سهولت فرض کنیم در حالت تعادل کلیه فنرها طول عادی دارند، معادلات حرکت نیوتن برای دو جرم مذکور چنین خواهد بود

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k'(x_2-x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k'(x_2-x_1) \end{cases} \quad (۴-۲۰۷)$$

در نوشتن جمله دوم سمت راست هردو رابطه توجه داشته باشید که اگر مثلاً x_2 بزرگتر از x_1 باشد، فنر وسط به اندازه (x_2-x_1) کشیده شده و نیرویی $k'(x_2-x_1)$ بر روی جسم سمت چپ به طرف راست، یعنی مثبت و بر روی جسم سمت راست به طرف چپ، یعنی منفی است. همانطور که می بینیم فنر k' که به وضوح از لحاظ فیزیکی عامل جفتیدگی است، به لحاظ ریاضی نیز چنین اثری را دارد. جملات متناسب با k' در رابطه (۴-۲۰۷) باعث شده است معادله حرکت مربوط به مختصه x_1 شامل مختصه x_2 نیز باشد و معادله حرکت مختصه x_2 نیز شامل مختصه x_1 باشد.

با نامگذاری های زیر

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{و} \quad \omega^2 = \frac{k'}{m} \quad (۴-۲۰۸)$$

معادلات حرکت (۴-۲۰۷) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2) x_1 - \Omega^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - \Omega^2 x_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2) x_2 = 0 \end{cases} \qquad (۴-۲۰۹)$$

طبق معمول برای یافتن کلی‌ترین حل معادلات (۴-۲۰۹) سعی می‌کنیم جوابی را برای آنها حدس بزنیم. اما پیش از آن لازم است توجه کنیم که ما دو معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ داریم که دیدیم رفته کلی‌ترین جواب آنها باید شامل ۴ ثابت دلخواه باشد. حل خاصی که برای معادلات (۴-۲۰۹) به طور نوعی حدس می‌زنیم «مد نوسانی» نام دارد. هر مد نوسانی عبارت است از یک حرکت نوسانی سینوسی توسط کلیه اجزائی که در آن:

الف - همه نوسانگرها با یک بسامد نوسان کنند،

ب - نوسانگرها با هم نیمه همفاز باشند، یعنی یا هم فاز باشند و یا در فاز مخالف هم و

ج - دامنه‌ها متفاوت باشد ولی نسبت دامنه‌ها با هم اعداد مشخصی باشند.

برای مثال فوق یک مد نوسانی با توابع زیر توصیف می‌شود

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad (۴-۲۱۰)$$

هم بسامد بودن به وضوح در حل (۴-۲۱۰) لحاظ شده است. فاز اولیه حرکت نیز یکسان در نظر گرفته شده ولی A_1 و A_2 ممکن است

هم علامت باشند یا غیر هم علامت. اگر A_1 و A_2 هم علامت باشند دو نوسانگر
هم فازند و اگر علامت آنها متفاوت باشد علامت منها را می توان
با افزودن یک فاز π به داخل آرگومان کسینوس جبران کرد. به
این ترتیب یا دو نوسانگر کاملاً هم فازند یعنی با هم به ماکزیمم و
مینیمم حرکت خود (در سمت های یکسان) می رسند و یا اگر اختلاف
فاز π داشته باشند به طور الاکلنگی حرکت می کنند و وقتی یکی از
آنها به ماکزیمم خود رسیده دیگری در سمت مخالف حرکت کرده و
به مینیمم خود رسیده است. وجه مشترک هر دو حالت آن است
که در هر دو حال نوسانگرها همزمان با هم از موضع تعادل خود عبور
می کنند (در حالت هم فاز در یک سمت و در حالت فاز مخالف در دو سمت
مخالف). به همین دلیل می توان شرط لازم فوق را به صورت زیر
نیز بیان کرد:

الف - نوسانگرها همزمان با هم از موضع تعادل خود عبور می کنند.

در یک مد نوسانی
در شکل (۲-۲۸)
برای مثال مورد تکرار مد نوسانی (۲-۲۱۰) با ویژگی تعیین
می شود، یکی بسامد ω و دیگری نسبت A_1/A_2. به طور کلی در مورد
هر دستگاه جفت شده دیگر مد نوسانی با بسامد و نسبت دامنه ها
مشخص می شود. توجه کنید که در رابطه (۲-۲۱۰) اگر η_1 و η_2
به یک نسبت بزرگ شوند و یا فاز φ با انتخاب مبدأ زمان به هر
مقدار ممکن انتخاب شود تفاوتی ایجاد نمی شود. بنابراین

بزرگی و فاز کلی مد نوسانی می تواند دلخواه باشد و نهایتاً از شرایط اولیه مسئله تعیین خواهد شد. حال سعی کنیم مشخصات اصلی یعنی ω و A_1/A_2 را برای مد نوسانی (۴-۲۱۰) تعیین کنیم. اگر روابط (۴-۲۱۰) را در معادلات حرکت (۴-۲۰۹) قرار دهیم حاصل می شود

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 A_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2) A_1 - \Omega^2 A_2\right) \sin(\omega t + \varphi) = 0 \\ \left(-\omega^2 A_2 - \Omega^2 A_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2) A_2\right) \sin(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases}$$

با حذف $\sin(\omega t + \varphi)$ از معادلات فوق و بیان روابط حاصل به شکل ماتریسی داریم

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 + \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (۴-۲۱۱)$$

معادلات (۴-۲۱۱) یک دستگاه دو معادله دو مجهولی همگن است، یعنی سمت راست معادلات صفر است. اگر ماتریس ضرایب در سمت چپ رابطه فوق معکوس پذیر باشد در این صورت A_1 و A_2 هر دو صفر خواهند بود، یعنی جواب بدیهی که در آن هیچکدام از اجسام حرکت نمی کنند. بنابراین تنها راه ممکن برای یافتن جواب غیر بدیهی آن است که ماتریس ضرایب فوق تکین باشد، یعنی معکوس نداشته باشد. چنین چیزی وقتی اتفاق می افتد که دترمینان ماتریس مذکور صفر باشد. اعمال چنین شرطی ما را به معادله زیر که به آن "معادله مشخصه" می گوییم می رساند:

$$(-\omega^2+\omega_0^2+\Omega^2)^2-\Omega^4=0 \qquad (۴-۲۱۲)$$

معادلهٔ مشخصه یک معادلهٔ درجه ۲ برای ω^2 است که شامل دو جواب حقیقی است. در این مورد خاص دو جواب (۴-۲۱۲) از روابط زیر به دست می‌آیند

$$-\omega^2+\omega_0^2+\Omega^2=\pm\Omega^2 \qquad (۴-۲۱۳)$$

که منجر به دو جواب زیر می‌شوند

$$\omega_1^2=\omega_0^2+2\Omega^2$$
$$\omega_2^2=\omega_0^2 \qquad (۴-۲۱۴)$$

به این ترتیب دو بسامد خاص به دست می‌آید که هرکدام مشخص کننده یک مد نوسانی دستگاه است. برای مد ω_1 اگر مقدار ω_1^2 از رابطه (۴-۲۱۴) را در معادله (۴-۲۱۱) بگذاریم خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix}-\Omega^2 & -\Omega^2\\ -\Omega^2 & -\Omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=-1 \qquad (۴-۲۱۵)$$

و اگر مد ω_2 را درهمان معادله قرار دهیم خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix}\Omega^2 & -\Omega^2\\ -\Omega^2 & \Omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=1 \qquad (۴-۲۱۶)$$

اگر نتایج ~~...~~ به دست آمده از روابط (۴-۲۱۴) تا (۴-۲۱۶) را خلاصه کنیم، دستگاه ~~...~~ در ~~...~~ مد نوسانی نخست با بسامد $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2+2\Omega^2}$ و دامنه‌های مساوی ولی با فاز مخالف نوسان می‌کند و در مد دوم با بسامد ω_2 و دامنه‌های مساوی و در فاز یکسان نوسان می‌کند.

تجسم حرکت دستگاه برای هر دو مد جالب توجه و در عین حال جذاب است. در مد اول نوسانگرها همواره در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند، همزمان باهم به دیواره‌ها نزدیک می‌شوند و سپس باهم از مرکز تعادل عبور می‌کنند و با ادامه حرکت به هم نزدیک می‌شوند و همزمان در انتهای مسیر به سکون لحظه‌ای می‌رسند. در بازگشت مجدداً نوسانگرها به سمت دیواره‌ها حرکت می‌کنند و حرکت تکرار می‌شود.

در مد دوم دو نوسانگر همواره فاصله ثابتی از هم را حفظ می‌کنند و باهم و در یک جهت به چپ و راست حرکت می‌کنند. دامنهٔ حرکتها نیز برابر است. در طی این حرکت فنر وسط بلااثر است و همراه جسم‌ها فقط به چپ و راست منحرف می‌شود. به همین دلیل بسامد حرکت با بسامد نوسانگرها در حالت غیر جفتیده یکسان است. کلی‌ترین حل معادلات حرکت (۴-۲۰۹) ترکیبی از این دو مد نوسانی به شکل زیر است

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = -A\cos(\omega_1 t + \varphi) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (۴-۲۱۷)$$

در هر یک از مدها فاز و دامنهٔ کلی اختیاری انتخاب شده ولی بسامد و نسبت دامنه‌ها با توجه به ویژگیهای مد نوسانی مربوط تعیین شده است. همان طور که می‌بینیم روی هم چهار ثابت اولیه A و φ_1، B و φ_2 به عنوان ثابتهای اولیه

تعیین نشده باقی مانده اند و تعیین آنها بر عهده شرایط اولیه دستگاه

است. مثلاً اگر دو جسم را به مقدار یکسان از هم دور و رها کنیم مد اول برانگیخته شده و مد دوم را نداریم و اگر دو جسم را به مقدار یکسان از یک طرف از حال تعادل خارج و آنها را رها کنیم فقط مد دوم تحریک می شود.

توجه کنید که اگر جرم ها و یا بهای فنرهای طرفین را متفاوت

بگیریم شکل مدها به این سادگی نیست و دامنه ها نیز

در هر مد یکسان نخواهند بود اما شکل کلی حرکت کم و بیش به همین صورت

است که در یک مد جسم ها از هم دور و نزدیک می شوند

و در دیگری با هم به چپ و راست حرکت می کنند اما با دامنه های

متفاوت.

گاه می شود عوامل میرایی را طوری طراحی کرد که یک مد پس

از مدتی میرا شود و از بین برود و مدهای دیگر باقی بمانند. مثلاً اگر

بازوهای یک میرا کننده را به دو جسم وصل کنیم مد اول با توجه به

نیروی میرا کننده با $-b(\dot{x}_2-\dot{x}_1)$ به تدریج میرا شده و

حذف می شود و فقط مد دوم باقی می ماند.

حال نگاهی کنیم به مراحل حل یک مسئله نوسانگرهای جفت شده برای هر تعداد دلخواه

الف ـ نوشتن معادله حرکت جفت شده نوسانگرها

ب ـ قرار دادن حل کلی از نوع مد نوسانی به صورت $x_i = A_i\cos(\omega t+\varphi_i)$ در معادلات حرکت

ج ـ تشکیل ماتریس ضرایب A_i ها برحسب ω^2 و پارامترهای فیزیکی مسئله که یک ماتریس $n\times n$ (برای n نوسانگر) است

د- نوشتن معادله مشخصه دستگاه با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب که یک معادله درجه n از ω^2 است و یافتن جوابها به صورت n بسامد مشخصه دستگاه

ه- حل معادله A_i ها به ازای هریک از بسامدهای مشخصه و یافتن نسبت دامنه ها به یکدیگر

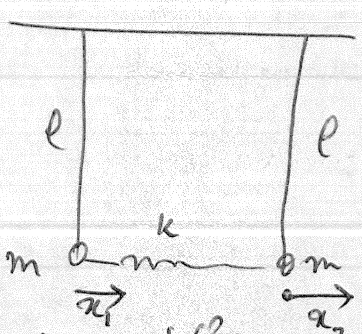
و- نوشتن کلی ترین حل دستگاه به صورت ترکیب خطی از مدهای نوسانی، که در هر مد دامنه ~~ ~~ و فاز کلی ثابت اختیاری است.

لازم به توجه است که در گام "د" از روند فوق همواره انتظار می رود که n پاسخ حقیقی و مثبت برای ω^2 به دست آید. اگر غیر از این باشد بدان معناست که نوسان دستگاه حول نقطه تعادل تابع از آن نبوده است. چنانچه ~~ ~~ مدهای نوسانی دارای جواب اعداد مختلط به شکل حل های از نوع $e^{i\omega t}$ بگیریم (در حالتی که ω^2 منفی باشد) به معنای وجود بخش موهومی در ω است. این چنین عبارتهایی یا ناشی از میرایی عبارتهای نمایی در حل ها است (که در اینجا وجود ندارد) و یا ناشی از آن است که نقطه تعادل ناپایدار است و جواب مربوطه نسبت به بعضی از مختصات نقطه تعادل ناپایدار نیست و جواب دستگاه در طول زمان به طور نمایی از نقطه تعادل دور می شود.

در مورد بند "ه" نیز همان طور که در مثال این بخش گفته شد، دستگاه معادلات برای A_i ها فقط می تواند نسبت آنها را به دست دهد. به خاطر داشته باشیم که پیش از این و در گام قبل، درخواست کرده ایم

که دترمینان ضرایب صفر باشد. بنابراین معادلاتی که برای A_i ها می‌نویسیم از هم مستقل نیستند و یکی از آنها تکراری است. به این ترتیب یکی از A_i ها مثلاً A_1 را می‌توان دلخواه گرفت و بقیه را برحسب آن به دست آورد.

۱- آونگ‌های جفت شده (زیربخش)



شکل (۴-۲۹)

شکل (۴-۲۹) دو آونگ ساده به طول l و جرم آویخته m را نشان می‌دهد که توسط فنری به ضریب k به هم جفت شده‌اند. فرض می‌کنیم دامنه نوسانها کوچک است به طوری که فنر k در عمل همواره افقی باقی بماند. مختصات x_1 و x_2 را جابه‌جایی گلوله‌های آونگ از وضعیت تعادل هر یک از آنها در نظر می‌گیریم. در غیاب فنر مؤلفه مماسی نیروی وزن برای هر یک از فنرها نیروی بازگرداننده است و معادلات حرکت به صورت غیرجفتیده زیر است

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}x_1 \\ m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}x_2 \end{cases}$$

فنر k باعث جفتیدگی نوسانگرها به یکدیگر است. اگر x_1 و x_2 تفاوت داشته باشند نیروی وارد بر جرم سمت چپ از فنر $k(x_2-x_1)$ در یک لحظه و نیروی وارد بر جرم سمت راست $-k(x_2-x_1)$ است. به این ترتیب معادلات حرکت جفتیده دستگاه چنین است

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}x_1 + k(x_2-x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}x_2 - k(x_2-x_1) \end{cases} \quad (۴-۲۱۸)$$

با تقسیم طرفین روابط فوق بر m خواهیم داشت

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2) x_1 - \Omega^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - \Omega^2 x_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2) x_2 = 0 \end{cases} \quad (۲۱۹-٤)$$

که در آن فرض شده

$$\omega_0^2 = g/\ell \quad , \quad \Omega^2 = \frac{k}{m} \quad (۲۲۰-٤)$$

معادلات (۲۱۹-٤) عیناً مشابه به معادلات (۲۰۹-٤) برای دستگاه شکل (۲۸-٤) است، فقط نامگذاری ω_0 و Ω در این حالت تفاوت دارد. بنابراین تجزیه و تحلیل مسئله و جواب نهایی مشابه همان مثال قبلی است. می‌توان ۳ یا چند آونگ را مشابه شکل (۲۹-٤) با فنرهایی به هم جفت کرد و مدهای نوسانی آنها را مطالعه کرد. همچنین می‌توان در دستگاه جرم و فنرهای شکل (۲۸-٤) تعداد جرم‌ها و فنرها را بیشتر کرد و معادلات حرکت دستگاه جفت‌شده مربوطه را بررسی کرد. بحث بیشتر در این مورد را به حل تمرین توسط دانشجو وامی‌گذاریم.

- جفت‌شدگی ضعیف (زیربخش)

در این قسمت می‌خواهیم وضعیتی را در نظر بگیریم که عامل جفت‌شدگی ضعیف باشد. مثلاً در مثال نوسانگرهای شکل (۲۸-٤) فرض می‌کنیم فنر وسط نسبت به فنرهای کنار ضعیف باشد، یعنی $k' \ll k$؛ در نتیجه $\omega_0 \gg \Omega$. و یا در مثال آونگ‌های جفت‌شده شکل (۲۹-٤) فرض کنیم فنر چنان ضعیف باشد که $\frac{k}{m} \ll g/\ell$ و یا $\omega_0 \gg \Omega$. در هر حالت بسامد مدهای نوسانی چنین است

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 (1+\epsilon) \\ \omega_2 &= \omega_0 \end{aligned} \quad (۲۲۱-٤)$$

با توجه به روابط (۲۱٤-٤)

که در آن $\epsilon = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$. اثر ضعیف بودن جفتیدگی آن

است که بسامد مدهای نوسانی بسیار به هم نزدیک هستند. برای این که

این اثر را بهتر ببینیم بهتر است حل کلی دستگاه در روابط (۲۱۷-٤) را

برای شرایط اولیه خاصی در نظر بگیریم که دستگاه از حال سکون و در

وضعیتی که جسم سمت راست در نقطه تعادل است ولی جسم سمت چپ به اندازه

D از وضعیت تعادل منحرف است، رها می شود. بنابراین شرایط اولیه را چنین

می گیریم

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \qquad x_1(0) = D \,,\quad x_2(0) = 0 \tag{۲۲۳-٤}$$

با اندکی محاسبه می توان دید که در این حالت فازهای φ_1 و φ_2 جواب کلی

(۲۱۷-٤) صفر است و دامنه مدها نیز به صورت $A = B = D/2$

به دست می آید. بنابراین جواب دستگاه چنین است

$$x_1 = \frac{D}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = D\cos\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

$$x_2 = \frac{D}{2}(-\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = -D\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \tag{۲۲۴-٤}$$

حل روابط (۲۲۱-٤) برای ضعیف بودن جفتیدگی را اعمال می کنیم:

$$x_1(t) \simeq D\cos\left(\frac{\epsilon}{2}\omega_0 t\right)\cos\omega_0 t$$

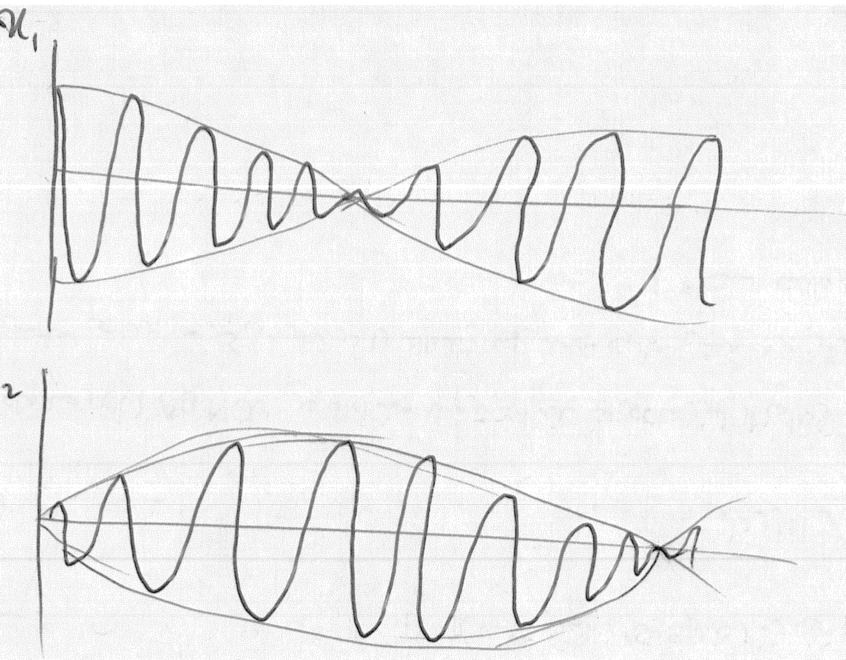
$$x_2(t) \simeq -D\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\omega_0 t\right)\sin\omega_0 t \tag{۲۳٤-٤}$$

شکل (٤-٤٦) نمودار $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را برحسب زمان نشان می دهد. هر

دو حرکت از یک نوسان با بسامد بزرگ ω_0 تشکیل شده که

دامنه آنها در زمان طولانی (در مقایسه با دوره نوسان $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$)

با یک نوسان آرام با بسامد کوچک $\frac{\epsilon}{2}\omega_0$ (و پریود بزرگ $T_b = \frac{4\pi}{\epsilon\omega_0}$



(شکل ۴-۴۰)

تغییر می‌کند، اما نکته‌ی جالب آن است که در شروع حرکت x_2 ناچیز است و x_1 با دامنه بزرگ نوسان می‌کند. یعنی جرمی که آن را منحرف کردیم در جای خود نوسان قابل توجه دارد اما هنوز حرکتش به جرم دوم منتقل نشده است. بعد از گذشت زمان $\frac{1}{4}T_b = \frac{\pi}{\epsilon\omega_0}$ دامنه x_1 صفر می‌شود و x_2 با دامنه بزرگ نوسان می‌کند و مجدداً در زمان $\frac{1}{2}T_b = \frac{2\pi}{\epsilon\omega_0}$ وضعیت برعکس می‌شود. منظره جالبی است. در فواصل زمانی منتظم $T_b/4$ نوسان از جسم یک به جسم دو و برعکس دست به دست می‌شود و در بین این دو وضعیت هر دو نوسانگر، البته با فازهای متفاوت، نوسان می‌کنند.

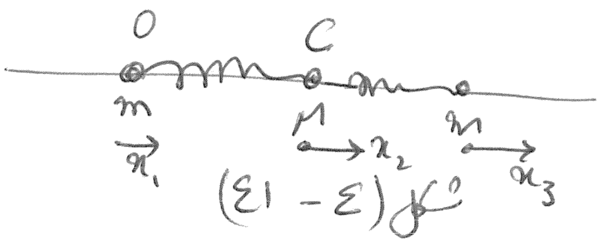
این نوع حرکت، چه برای جسم یک و چه جسم دو پدیده‌ی "ضربان" یا "زنش" نام دارد. اگر کمی در روابط (۴-۲۲۴) دقت کنیم این پدیده بر اثر ترکیب دو حرکت نوسانی با بسامدهای نزدیک به هم پیش آمده است که حاصل آن نوسانی با یکی از بسامدهاست که دامنه‌ی آن با بسامدی به اندازه

تفاضل بسامدها کوچک و بزرگ می شود. مثلاً اگر دو دیاپازون تقریباً مشابه را باهم به ارتعاش واداریم، موج سینوسی که بر اثر تداخل امواج آنها به گوش ما می رسد جمع دو حرکت نوسانی با بسامدهای نزدیک به هم را در گوش ما ایجاد می کند. در این حالت گوش ما به تناوب شاهد ضعیف و قوی شدن شدت صوت است. این روش در عمل می تواند به عنوان روشی برای سنجش بسامدهم به کار رود. برای سنجش بسامد یک نوسانگر نامعلوم می شود نوسان آن را با نوسان حاصل از نوسانگری با بسامد شناخته شده ترکیب کرد و ~~[illegible]~~ از روی بسامد زنش تفاوت بسامد آن را با بسامد نوسانگر معلوم به دست آورد.

(زیر بخش)

— مدهای نوسانی مولکولها

پیش از این دیدیم که اتمهای تشکیل دهنده مولکولها باهم برهمکنش هایی دارند که در حالت تعادل اتمها در فاصله ها و زاویه هایی از هم قرار می گیرند که در وضعیت کمینه پتانسیل دستگاه حاصل می شود. اما مثل دستگاههای ماکروسکپی در این حال نیز می توان نوسانهای کوچک حول نقاط کمینه پتانسیل را ~~[illegible]~~ در نظر گرفت و برهمکنش اجزای دستگاه باهم را با نیروهای شبه فنری مدل سازی کرد. مثلاً مولکول CO_2 در حالت تعادل یک مولکول خطی است که در آن اتم کربن به فواصل مساوی از دو اتم اکسیژن قرار دارد. این دستگاه را می شود با نوسانگرهای جفت شده شکل (۴ - ۴۱) مشابه سازی کرد. این دستگاه هم می تواند آزادانه در



شکل (۴ - ۴۱)

مثل یک میله صلب

فضا جابجا شود، هم می تواند بچرخد و هم ممکن است اجزای آن نوسان کرده و نسبت به هم دور و نزدیک شوند. هر کدام از این حرکتها می توانند باعث ایجاد حالتهای برانگیخته در مولکول CO_2 بشوند. در نظریه کوانتمی می توان با مطالعه طیف تابش های مولکول CO_2 بسامد مدهای نوسانی آن را اندازه گیری کرد و با مدل نظری مقایسه کرد.

مولکول CO_2 دارای مدهای نوسانی طولی و عرضی است. در اینجا فقط به مدهای طولی توجه می کنیم و سعی می کنیم با آنچه آموخته ایم ویژگیهای مدهای نوسانی طولی (بسامد و نسبت دامنه ها) را به دست آوریم. فرض کنید جرمها m، M و m باشند و جابجایی ها از حالت تعادل مطابق شکل (۴-۴۱)، x_1، x_2 و x_3 باشد. با توجه به شکل معادلات حرکت نیوتن چنین است

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1) \\
M\ddot{x}_2 &= k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) \\
m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2)
\end{aligned}
\qquad (۴\text{-}۲۲۵)
$$

با نامگذاری

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{و} \quad \Omega_0^2 = \frac{k}{M} \qquad (۴\text{-}۲۲۶)$$

و اعمال مد نوسانی به صورت $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$ در معادلات حرکت (۴-۲۲۵) داریم

$$
\begin{pmatrix}
-\omega^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\
-\Omega_0^2 & -\omega^2 + 2\Omega_0^2 & -\Omega_0^2 \\
0 & -\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\qquad (۴\text{-}۲۲۷)
$$

از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، پس از اندکی محاسبه، معادله مشخصه زیر به دست می‌آید:

$$\omega^2(-\omega^2+\omega_0^2)(\omega^2-\omega_0^2-2\Omega_0^2)=0 \qquad (۴-۲۲۸)$$

بنابراین بسامد مدهای نوسانی چنین است

$$\omega_1=0, \quad \omega_2=\omega_0 \quad , \quad \omega_3=\sqrt{\omega_0^2+2\Omega_0^2} \qquad (۴-۲۲۹)$$

به ازای $\omega=\omega_1$ معادله (۴-۲۲۷) چنین است

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\Omega_0^2 & 2\Omega_0^2 & -\Omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که حل آن $A_1=A_2=A_3$ است. اما مد با بسامد صفر یعنی چه؟ این مد در واقع توصیف کننده حرکت انتقالی دستگاه است که در آن جابه‌جایی لحظه‌ای هر سه جرم برابر است و طبیعتاً در این حرکت نوسانی اتفاق نمی‌افتد.

به ازای $\omega=\omega_2$ معادله (۴-۲۲۷) به صورت زیر می‌شود

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\Omega_0^2 & \omega_0^2+2\Omega_0^2 & -\Omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که حل آن $A_2=0$ و $A_1=A_3$ است. در این مد جرم M در وسط ساکن می‌ماند و دو جرم m در دو طرف با دامنه یکسان در جهت‌های مخالف هم حرکت می‌کنند، به طوری که مرکز جرم دستگاه در محل جرم M ساکن باقی می‌ماند.

به ازای $\omega=\omega_3$ نیز معادله (۴-۲۲۷) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{pmatrix} -2\Omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\Omega_0^2 & -\omega_0^2 & -\Omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -2\Omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

که حل آن به صورت زیر است

$$A_1 = A_3 = -\frac{\omega_0^2}{2\Omega_0^2} A_2$$

و یا

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_3}{A_2} = -\frac{M}{2m}$$

در این مد جرم‌های m در دو طرف با هم به طرف راست و چپ حرکت می‌کنند اما جرم M در وسط ~~با~~ در فاز مخالف آنها حرکت می‌کند و دامنه آن به نسبت $\frac{2m}{M}$ دامنه جرم‌های کناری است. این نسبت دقیقاً طوری است که مرکز جرم دستگاه در هر لحظه ساکن است.

بنابراین از تجزیه و تحلیل مدهای نوسانی در واقع فقط دو مد نوسانی طولی به دست می‌آید که مربوط به بسامدهای ω_2 و ω_3 است.

* * *