Subject:

Year. Month. Date. ۱۷۲( )

جلسه‌ی ۲۷

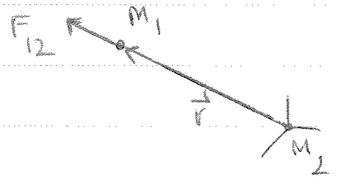
در بررسی‌های درس جلسه‌ی ۲۵، می‌توان بخش حرکت مرکز جرم را به عنوان یک مسئله‌ی تک جسمی

در نظر گرفت که می‌شه حلش کرد. دومین بخش که اهمیت بیشتری دارد مربوط به نیروی مرکزی است.

چراکه نقطه شروع اگر $F_{ext}=0$ باشد، معادله‌ی نیوتون برای مرکز جرم، جرم کاهیده چنین می‌شود:

$$\ast\; M\frac{d^2R}{dt^2}=0 \rightarrow R(t)=Vt+R_0$$

$$\ast\; \mu\ddot{r} = F_{12} = F(r)\,\hat{r}$$



پس ۲ حرکت نسبی دو جسم برای‌مان مهم است که این هم با نیروی مرکزی حل می‌شود.

پس از این جا به بعد شروع می‌کنیم به مسئله‌ی تک ذره‌ای با نیروی مرکزی زیرا

مسئله‌ی ۲ جسم را که نیروی خارجی در آن صفر باشد و یا ثابت است، می‌توان تفکیک کرد به حرکت

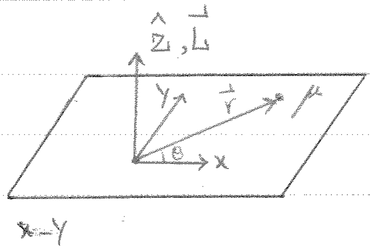
مرکز جرم، و حرکت نسبی که این حرکت نسبی می‌شود حرکت یک تک ذره با جرم μ در نیروی مرکزی.

حل مربوط به نیروی مرکزی هم که بلد شویم عملاً مسئلهٔ مربوط به حرکت نسبی در مسئله‌ی ۲ جسم را

قادر به حل هستیم.

قبلاً اثبات شد که زمانی که نیروی مرکزی داشته باشیم حرکت محدود به صفحه خواهد بود، صفحه‌ای

که عمود بر امتداد بردار $\vec{L}$ است.



$\vec{F} = F(r)\hat{r}$; $\mu\vec{a} = F(r)\hat{r}$: قانون نیوتن

شتاب را بتوان در دستگاه قطبی بر حسب مولفه‌ی شعاعی و زاویه‌ای نوشت. بنابراین:

$$\begin{cases}\mu a_r = F(r) \rightarrow \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \\ \mu a_\theta = 0 \rightarrow \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \xrightarrow{\times r} \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0 \end{cases}$$ (الف)

چرا که اگر مشتق گیری را انجام دهیم نشان داده می‌شود که همان معادله فوقمون است:

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 2\mu r\dot{r}\dot{\theta} + \mu r^2\ddot{\theta} = 0 \quad \checkmark$$

قبلاً نشان دادیم که جمله‌ی $\mu r^2\dot{\theta}$ همان کمیت تکانه‌ی زاویه‌ای است. لذا رابطه‌ی (الف) رابطه‌ی پایستگی تکانه زاویه‌ای را بیان می‌دارد زیرا

$$\vec{l} = \mu(r\hat{r}) \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \mu r^2\dot{\theta}\hat{z}$$

$$\Rightarrow l = |\vec{l}| = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \quad \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$$

که مقدار l می‌تواند مثبت یا منفی باشد. اگر از بالا نگاه کنیم $\vec{l}$ در جهت $+\hat{z}$ خواهد بود اگر ذره پادساعتگرد بچرخد (بنابر قانون دست راست) و اگر ذره ساعتگرد بچرخد جهت $\vec{l}$ $-\hat{z}$ خواهد بود.

Subject:
Year. Month. Date. ۱۷۳

یادمان نرود که این مسئله در اصل یک مسئله‌ی نیروی مرکزی شود نه یک مسئله‌ی ۲ جسمی داریم

که مسئله حرکت نسبی آن است زمانی که نیرو هم از قانون سوم نیوتون و بیان قوی تبعیت

کند. از ابتدا هم دلیل علاقه‌مان به نیروی مرکزی همین بوده!

سراغ معادله‌ی اولمان رویم: $\mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = F(r)$

این معادله نیز به قانون یا ثابت دیگری ختم می‌شود، «قانون پایستگی انرژی»

زیرا نیرویی که دو جسم بهم وارد می‌کنند از نوع اتلافی و اصطکاکی نیست.

جایگذاری $\dot{\theta}$ در معادله $\rightarrow \mu\ddot{r} - \dfrac{l^2}{\mu r^3} = F(r) \xrightarrow{\text{طرفین در } \dot{r} \text{ ضرب می‌شود}}$

$$\mu\dot{r}\ddot{r} + \frac{l^2}{\mu}\left(\frac{-\dot{r}}{r^3}\right) - \dot{r}F(r) = 0 \xrightarrow{\text{که هست}} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)\right] = 0$$

که رابطه‌ی آن با نیرو چنین بود: $F(r) = -\dfrac{dV}{dr} \rightarrow -\vec{\nabla}V(r) = -\dfrac{dV}{dr}\hat{r} = F(r)\hat{r}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} = E$$

این ثابت همان انرژی است زیرا برای حرکت نسبی انرژی را بدست آوریم:

$$E_{\text{نسبی}} = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{l}{2\mu r}\right)^2 + V(r)$$

در ضمن ۲ جمله ی $\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 = \frac{l^2}{2\mu r^2}$ انرژی مرکزگریز گفته می‌شود.

پس در نیروی مرکزی ۲ ثابت داریم: انرژی (E)، و تکانه زاویه‌ای ($\vec{l}$)

می‌توان همه چیز را برحسب این ۲ ثابت به دست آوریم.

با دانستن $r(t)$ می‌توان از عبارت $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$ انتگرال گرفت و θ را به دست آورد.

خود $r(t)$ را از رابطه ی $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E$ به دست می‌آوریم.

همچنین رابطه را می‌توان اینگونه نوشت:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_e(r) = E$$

که در آن $V_e(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$ است که به آن "پتانسیل مؤثر" گویند.

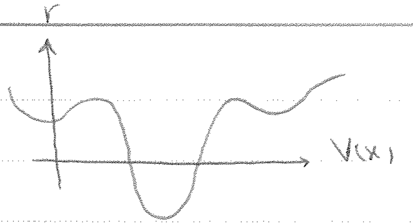
یک انرژی پتانسیل داریم، $V(r)$، که ناشی از برهم‌کنش است و مشتق آن نیرو را می‌دهد.

$V(r)$ انرژی پتانسیل واقعی دستگاه است. جمله ی $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$ انرژی جنبشی دستگاه است. حالا جمله ی $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ را برمی‌داریم و با $V(r)$ جمع می‌زنیم و به حاصل عبارت حاصله می‌گوییم پتانسیل مؤثر دستگاه. حسن این کار اینه که می‌رسیم به رابطه ی انرژی یک تک ذره که مثل اون رو از فصل ۲ بلد هستیم.

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_e(r) = E$$

حالا می‌توان جای اوردیم نمودار $V - r$ را رسم کردیم و خط E را می‌کشیم و نقطه بازگشت‌ها

مثلاً $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E$



اما در این جا باید نمودار $r - V_e(r)$ را رسم کنیم. خب انرژی جنبشی زاویه‌ای که

همیشه مثبت است را با پتانسیل واقعی جمع می‌کنیم.

و اما یک یادآوری کنیم که همان قانون مساحت‌های برابر است. زمانی که نیروی مرکزی باشد

در صفحه‌ی عمود بر $\vec{l}$ که مرتبط هست، بردار حامل ذره، مساحت‌های برابری را در زمان‌های

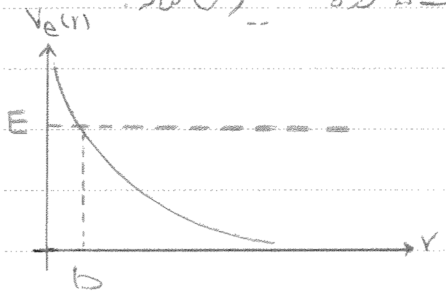
مساوی جاروب می‌کند.

حالا می‌رویم سراغ مثال‌های گوناگون $F(r)$!

مثال. if $F(r) = 0 \rightarrow V(r) = \text{const} \Rightarrow V_e(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2}$

زمانی که در دستگاه M_2 هستیم و به ذره‌ی M_1 نیرویی وارد نمی‌شود $(F(r)=0)$، M_1 بر

خط راست حرکت خواهد کرد. r فاصله‌ی میان ۲ ذره است که داره تغییر می‌کند.



E هم با توجه به رابطه‌ی (۱) $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} = E$

هیچ وقت منفی نمی‌تواند باشد.

به این حالت که $F(r) = 0$ است، ذرات آزاد هم می‌گوییم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

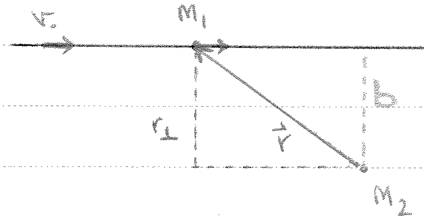
پس تنها یک نقطه‌ی بازگشت داریم و آن جایی است که $V_{eff}(r) = E$ شده است. در این

نقطه ($r = b$)، $\dot{r} = 0$ است یعنی r که داره با زمان تغییر می‌کنه در یک لحظه؟

یکهو به مقدار خودش می‌رسد و بعد دوباره زیاد می‌شود. پس از rهای بزرگ شروع میشه،

r یکهو به مقدار فاصله‌ی دو ذره می‌رسد و بعد دوباره r افزایش می‌یابد.

اگر فرض کنیم که زمانی که M_1 خیلی دور بوده سرعت v_0 دارد بنابراین



E همان انرژی جسم M_1 خواهد بود که از

دید M_2 جرم کاهیده را به آن نسبت میدهد.

$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

همچنین تکانه زاویه‌ای این دستگاه در یک لحظه برابر است با:

$$l = \mu v_0 r_\perp = \mu b v_0$$

b "پارامتر برخورد" گفته می‌شود. با جایگذاری l در عبارت (د)، صحت بالا

تصدیق می‌شود:

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2}\mu v_0^2 \quad ✓$$

که از این جا هم واضح است که اگر $r = b$ بگذاریم، حاصل می‌شود $\dot{r} = 0$

به عنوان تمرین برای حالت بدون برهم‌کنش که رابطه‌ی $E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$ برای

آنها صادق است. $r(t)$ را بدست آورید و از آن $\theta(t)$ را حساب کنید.

راهنمایی: $\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E - V_e(r) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_e(r)\right)}$

جایی که r دارد بزرگ میشود باید علامت مثبت را گرفت، و جایی که دارد r کاهش می‌یابد باید علامت منفی را گرفت. مثلاً در مثال قبل سمت راست ط، r در حال افزایش است.

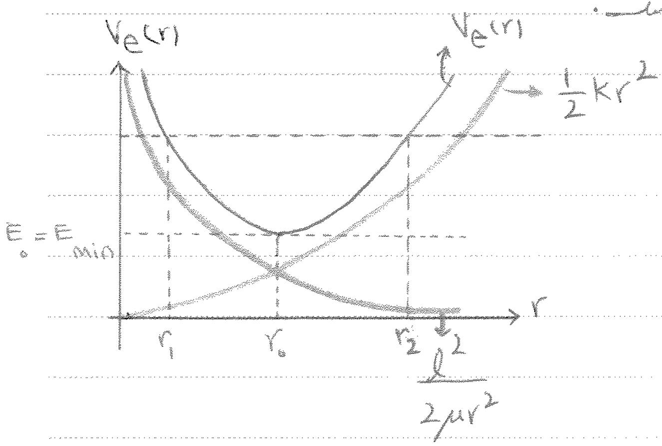
$$\to \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_e(r)\right)}} = \pm \int dt \to r(t) = \dots \Rightarrow \theta(t) = \dots$$

◪

مثال. نیروی فنر $F(r) = -kr \to V(r) = \frac{1}{2}kr^2$

$$\Rightarrow V_e(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

فراموش نشود که در مختصات قطبی r همیشه مثبت است.



با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_e(r) = E$

چون $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 \geq 0$ باید $E \geq V_e(r)$ باشد

لذا کمینه‌ی انرژی $E_0 = E_{min}$ است.

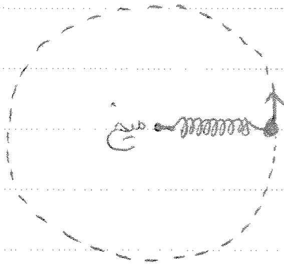
به ازای $E = E_0$، r فقط r_0 است و حرکت روی دایره خواهد بود. r ثابت است اما

ω تغییر می‌کند. برای بدست آوردن r_0 مینیمم باید از $V_e(r)$ نسبت به r مشتق گرفت و

برابر صفر قرار داد: $\frac{d}{dr}V_e(r)=0$

شعاع حرکت دایره $\Rightarrow Kr_0-\frac{l^2}{\mu r_0^3}=0 \rightarrow Kr_0^4=\frac{l^2}{\mu} \rightarrow r_0=\left(\frac{l^2}{\mu \underset{\text{ثابت فنر}}{K}}\right)^{1/4}$

اگر هم گفته می‌شد یک فنر رو از نقطه‌ای در صفحه میخ کردیم و یک سر آن ذره‌ای متصل است، حالا r چه شرطی حرکت روی دایره خواهد بود و یا شعاع دایره چقدر است، باید فنر را برابر $mr\omega^2$ می‌گذاشتیم و شعاع را بدست می‌آوردیم که دقیقاً همان r_0 بدست می‌آید. فقط l آن اگر سرعت v داشته باشد ذره چنین نوشته می‌شود:

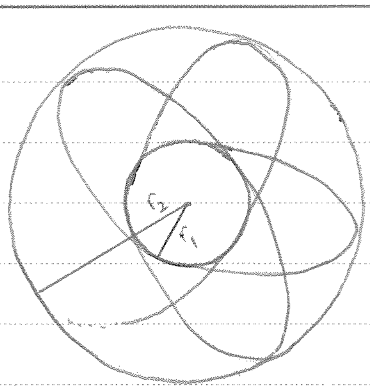


$$l=\mu r_0 v=\mu r_0^2\omega \quad ; \quad v=r_0\omega$$

حالا ببینیم اگر انرژی بیش‌تری از E داشته باشیم، شکل حرکت چه طور می‌شود.

r_1 و r_2 نقاط بازگشت هستند و حرکت بین این دو صورت می‌گیرد. $r_1<r<r_2$

روش حل و بدست آوردن $r(t)$، $\theta(t)$ در این حالت مشابه طریق گفته شده است.



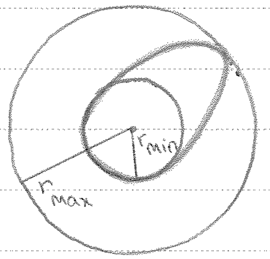
دربارهٔ شکل حرکت :

بین دو دایره‌ی ۲ شعاع‌های r_1 و r_2 ذره در حرکت است.

این شکل، حالت کلی است یعنی مسیر حرکت می‌تواند در

حالت کلی یک مسیر بسته نباشد و همین طور در مسیرهای مختلف بین این ۲ شعاع بچرخد.

اما اگر شکل پتانسیل (برای یک نیروی مرکزی) شکل خوب باشد، مسیر می‌تواند بسته شود:



یعنی یک حالت خاص است که مسیر بسته است.

مسیر تناوبی هم باشد اما یک T پیدا کرد که

$$\left.\begin{aligned} r(t+T) &= r(t) \\ \theta(t+T) &= \theta(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{در این صورت مسیر بسته است}$$

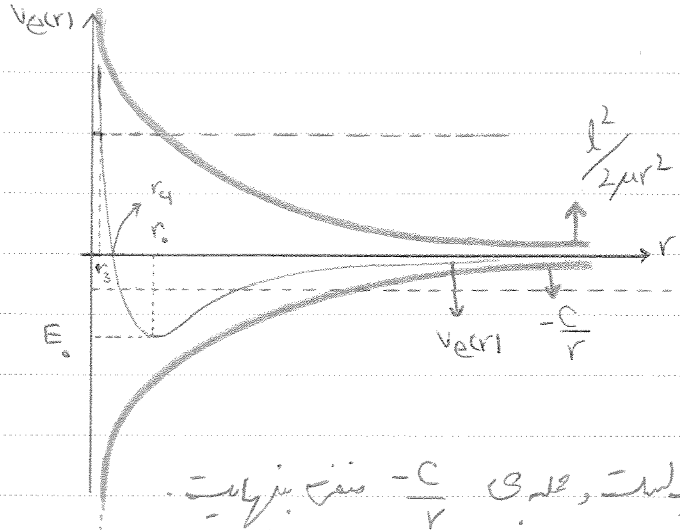
مثال: نیروی عکس مجذوری $F = -\frac{c}{r^2}$

این نوع نیرو را برای جاذبه می‌نویسیم که نیروی گرانش هم از این نوع است، نوع دافعه‌ی آن نیز قابل نوشتن است.

برای گرانش $\rightarrow C = GMm$

در الکتروستاتیک که دو بار ناهم‌نام باشند $\rightarrow kqq'$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{c}{r} \Rightarrow V_e(r) = \frac{-c}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$



نمودار $V_e(r)$ ـ r :

در rهای کوچک جمله‌ی $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ بی‌نهایت است و جمله‌ی $-\frac{c}{r}$ منفی بی‌نهایت.

پس در rهای کوچک جمله‌ی $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ غلبه دارد و نمودار از بالا شروع می‌شود. در rهای بزرگ جمله‌ی $-\frac{c}{r}$ زودتر صفر میشه. پس در rهای بزرگ نمودار زیر خط r خواهد بود. و لذا نمودار ما اجباراً باید خط r را یک جا قطع کند و یک min هم داشته باشد.

کمترین انرژی ممکن E_0 است که حرکت دایره‌ای داریم با شعاع r_0. واضح است که اگر نیروی عکس مجذوری از نوع دافعه بود، حرکت دایره‌ای اتفاق نمی‌افتاد.

$$\text{تعیین } r_0 \to \left.\frac{dV_e}{dr}\right|_{r_0}=0 \to \frac{c}{r_0^2}-\frac{l^2}{\mu r_0^3}=0 \to \boxed{r_0=\frac{l^2}{\mu c}}$$

بسامد زاویه‌ای حرکت دایره‌ای را می‌توان حساب کرد که باید به جای l نوشت $\mu r_0^2\omega$:

$$r_0=\frac{(\mu r_0^2\omega)^2}{\mu c}\to \mu c r_0=\mu^2 r_0^4\omega^2$$

$$\rightarrow r_0^3\,\omega^2 = \frac{C}{\mu}$$

if $C = GMm$

مثلاً جرم خورشید — مثلاً جرم سیاره

$$\rightarrow r_0^3\,\omega^2 = \frac{GMm}{\mu}$$

از طرفی $\mu = \frac{Mm}{M+m} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}} \xrightarrow{\text{if } m \ll M} \mu \simeq m\left(1-\frac{m}{M}\right)$

$$\Rightarrow r_0^3\,\omega^2 = \frac{GMm}{m\left(1-\frac{m}{M}\right)} = GM\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

با جایگذاری ω می‌توان نوشت $\rightarrow r_0^3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = GM\left(1+\frac{m}{M}\right) \Rightarrow T^2 \propto r_0^3$

که قانون ۳ کپلر بود

حال، اگر انرژی، کمینه نباشد یعنی $E \neq E_0$. آنگاه به طور خلاصه بیان می‌شود که

- $E_0 < E < 0 \rightarrow r_1 < r < r_2 \rightarrow$ اثبات می‌شود حرکت بیضی است
- $E > 0 \rightarrow r > r_3 \rightarrow$ هذلولوی (مسیر دیگر بسته نیست، باز است)
- $E = 0 \rightarrow r > r_4 \rightarrow$ سهمی (حرکت باز است)

پس شکل حرکت با نیروی عکس مجذوری یکی از مقاطع مخروطی خواهد بود.

سهمی مرز بین هذلولوی و بیضی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای اینکه مسیر حرکت نیروی مرکزی محدودی را بدست آوریم ۲ راه پیش رو داریم . راه اول همان روشی است که قبلاً انجام دادیم یعنی با انتگرال گیری $r(t)$ و بعد $\theta(t)$ بدست می‌آوریم:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E+\frac{c}{r}-\frac{l^2}{2\mu r^2}\right)} \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \pm\frac{\frac{l}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E+\frac{c}{r}-\frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}} \rightarrow \int d\theta = \pm\int\frac{\frac{l}{\mu r^2}\,dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E+\frac{c}{r}-\frac{l^2}{2\mu r^2}\right)}}$$

راه سریع حل این انتگرال ← $d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{dr}{r^2}$ پس متغیر u را چنین تعریف می‌کنیم

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow d\theta = \pm\int\frac{(\text{ضرایب})\,du}{\sqrt{\alpha+\beta u-\frac{l^2}{2\mu}u^2}} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{مربع کردن}} d\theta = \pm\int\frac{(\dots)\,du}{\sqrt{1-(\alpha+\beta u)^2}} \rightarrow \dots$$

جواب نهایی انتگرال → $\theta-\theta_0 = \cos^{-1}\left[\frac{\mu c r - l^2}{r\sqrt{\mu^2c^2+2\mu E l^2}}\right]$

$$\Rightarrow \mu c r - l^2 = r\sqrt{\mu^2 c^2+2\mu E l^2}\,\cos(\theta-\theta_0)$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{l^2}{\mu c}}{1-\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu c^2}}\cos(\theta-\theta_0)}$$

E می‌تواند مثبت یا منفی باشد ; (فعلاً محدودیتی روش نگذاشتیم)

PAPCO

در ضمن می‌توان مبدأ اندازه‌گیری θ را طوری در نظر گرفت که $\theta_0 = 0$ شود

با پارامتر $\epsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2El^2}{\mu c^2}}$ که به آن گریز از مرکز گفته می‌شود،

با توجه به آنچه به دست آوردیم $r_0 = \dfrac{l^2}{\mu c}$ می‌توان r را چنین نوشت:

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos\theta}$$

$\longrightarrow$ معادله‌ی مقاطع مخروطی

مقدار گریز از مرکز بستگی به E دارد:

if $E < 0 \rightarrow \epsilon < 1 \rightarrow$ بیضی

if $E > 0 \rightarrow \epsilon > 1 \rightarrow$ هذلولی

if $E = 0 \rightarrow \epsilon = 1 \rightarrow$ سهمی

جلسه‌ی ۲۸

و اما روش کار دوم برای به دست آوردن $r(t)$:

مستقیماً سراغ معادله حرکت که قبلاً به دست آوردیم برابر بود با

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

باتوجه به مقدار $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$ چنین شد:

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = F(r) \qquad \text{(الف)}$$

اکنون برای حل این معادله از روش تغییر متغیر بهره می‌بریم:

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \frac{-1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{-1}{r^2}\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{-1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \xrightarrow{\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\left(\frac{l}{\mu r^2}\right)} = \frac{-\mu}{l}\dot{r}$$

حالا دوباره از u نسبت به θ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{-\mu}{l}\frac{d}{d\theta}(\dot{r}) = \frac{-\mu}{l}\frac{d}{dt}(\dot{r})\cancel{\frac{dt}{d\theta}}^{\frac{1}{\dot{\theta}}} = \frac{-\mu}{l}\ddot{r}\frac{1}{\dot{\theta}} \xrightarrow{\text{جایگذاری } \dot{\theta}}$$

$$= \frac{-\mu}{l}\ddot{r}\frac{\mu r^2}{l} = \frac{-\mu^2 r^2}{l^2}\ddot{r} \xrightarrow{\text{برحسب } u} = \frac{-\mu^2}{l^2}\frac{\ddot{r}}{u^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \frac{-l^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

حالا $\ddot{r}$ را در رابطه‌ی (الف) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{-l^2}{\mu}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{\mu}u^3 = F(u) \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\mu}{l^2}\frac{1}{u^2}F(u)$$

حالا برای نیروی عکس مجذوری که مدنظر ماست $F(u) = -Cu^2$ پس:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu c}{l^2}$$

این معادله‌ی شکل معادله‌ی نوسانگر هماهنگ است با $\omega = 1$. جواب قسمت همگن آن هست:

$$u = A\cos(\theta-\theta_0) \quad \text{جواب عمومی}$$

و جواب خاص آن یعنی جواب قسمت ناهمگن آن برابر است با

$$u=\frac{\mu c}{l^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = A\cos(\theta-\theta_0)+\frac{\mu c}{l^2}} \quad \text{جواب کلی}$$

با توجه به اطلاعات قبلی جواب کلی بالا چنین می‌شود:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}-\frac{\epsilon}{r_0}\cos\theta=\frac{1-\epsilon\cos\theta}{r_0}$$

A باید بُعدش عکس طول باشد زیرا آن را به صورت $\frac{\epsilon}{r_0}$ می‌نویسیم که جلوتر مقدار ϵ را به‌دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow r=\frac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta}$$

با جایگذاری r و $\dot r$ در معادله‌ی پایستگی انرژی، ϵ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}\mu\dot r^2+\frac{l^2}{\mu r^2}-\frac{c}{r}=E \xrightarrow[\text{را انجام دهید که نتیجه می‌شود}]{\text{به عنوان تمرین محاسبات}} \epsilon=\left(1+\frac{2El^2}{\mu c^2}\right)^{1/2}$$

در محاسبات $\dot\theta$ داریم که $\dot\theta=\frac{l}{\mu r^2}$ است.

اکنون باید به تفصیل معادله‌ی مقاطع مخروطی را برای $\epsilon>1$ ، $\epsilon<1$ و $\epsilon=1$ حل کرد.

۱. برای $\epsilon<1$

$$r=\frac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta}$$

$$\Rightarrow r_0=r-\epsilon\,\underbrace{r\cos\theta} \to \sqrt{x^2+y^2}-\epsilon x=r_0$$

در قطبی برابر مختصه‌ی x دکارتی است

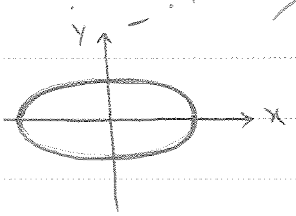
$$\Rightarrow x^2+y^2=(r_0+\epsilon x)^2 \to x^2+y^2=r_0^2+\epsilon^2x^2+2r_0\epsilon x$$

$$\to (1-\epsilon^2)x^2-2r_0\epsilon x+y^2=r_0^2$$

می‌توان عبارت $(1-\epsilon^2)x^2-2r_0\epsilon x$ را مربع کامل کرد که نهایتاً به رابطه‌ای به صورت $(\alpha x+\beta)^2+y^2=A^2$ رسید.

اگر مبدأ مختصات روی مرکز تقارن بیضی باشد، یک حالت معادله بیضی چنین خواهد بود:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



حالا که x^2 به صورت $(\alpha x+\beta)^2$ درآورده شده، مبدأ مختصات شیفت پیدا کرده لذا ـ طرف‌تر می‌توان نوشت

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

پس زمانی که به این نوع از معادلات برسیم، $x'^2+y^2=A^2$ ، شکل حرکت بیضی خواهد بود.

اگر تعامل دو طرفی مربعی داشتیم، شکل حرکت هذلولوی خواهد بود.

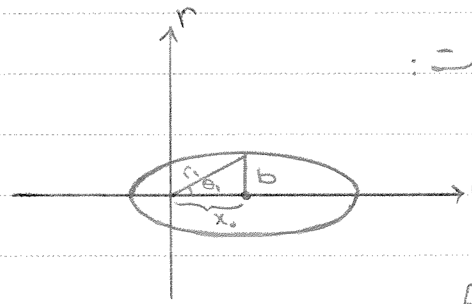
تمرین: خودتان مربع کامل کردن را انجام دهید و میزان شیفت پیدا کردن، x را پیدا کنید.

اکنون به مختصات قطبی می‌رویم. با توجه به رابطه‌ی $r = \frac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta}$ چه وقت r کمینه و چه وقت بیشینه است؟

$$r_{min} = \frac{r_0}{1+\epsilon} \; ; \theta = \pi$$

$$r_{max} = \frac{r_0}{1-\epsilon} \; ; \theta = 0$$

بسته بودن منحنی هم واضح است چراکه θ که یک دور بزند r همان مقدار قبلی خود را پیدا می‌کند. با توجه به توضیحات بالا شکل مسیر این گونه است:



طول قطر بزرگ $= A$

$$\Rightarrow A = 2a = r_{min} + r_{max} = \frac{2r_0}{1-\epsilon^2}$$

$\Rightarrow$ نیم قطر بزرگ $a = \frac{r_0}{1-\epsilon^2}$

طبق تعریف $x_0 = a - r_{min} = \frac{r_0}{1-\epsilon^2} - \frac{r_0}{1+\epsilon} = \frac{r_0(1-1+\epsilon)}{1-\epsilon^2} = \frac{\epsilon r_0}{1-\epsilon^2} = \epsilon a$

$\Rightarrow x_0 = a\epsilon \rightarrow \epsilon = \frac{x_0}{a}$ خروج از مرکز

در واقع خروج از مرکز مشخص می‌کند که فاصله‌ی کانون از مرکز چه نسبتی از نیم قطر بزرگ است.

اگر کانون و مرکز روی هم باشند یعنی $\epsilon = 0$ دایره داریم. خروج از مرکز نشان میدهد بیضی چقدر کشیده یا گرد است. r_0 هم اندازه ی بیضی را نشان میدهد که هر چقدر بزرگتر باشد اندازه ی بیضی هم بزرگتر خواهد بود اما میزان کشیدگی یا گرد بودن بیضی ها را ϵ تعیین میکند.

حالا میخواهیم نیم قطر کوچک (b) را بیابیم.

در مثلث رسم شده اضلاع r_1، x_0، b را داریم: $\frac{x_0}{r_1} = \cos\theta_1$

از طرفی r_1, θ_1 در معادله ی $r = \frac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta}$ صدق میکند: $r_1 = \frac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta_1}$

چون همه ی نقاط بیضی در این معادله ی مقاطع مخروطی صادق اند.

$\Rightarrow$ طرفین وسطین $\rightarrow r_1 - \epsilon \underbrace{r_1\cos\theta_1}_{x_0} = r_0 \rightarrow r_1 = r_0 + \epsilon x_0$

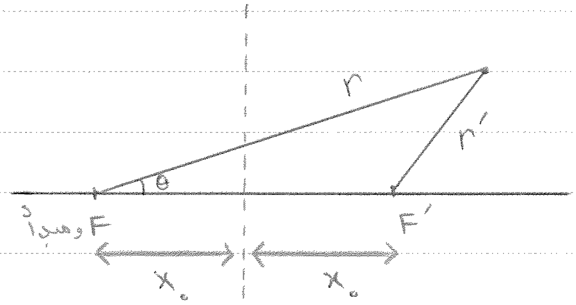
x_0 با جایگذاری $\rightarrow r_1 = r_0 + \frac{\epsilon^2}{1-\epsilon^2} r_0 = \frac{r_0}{1-\epsilon^2} = a \Rightarrow r_1 = a$

حالا: $b^2 = a^2 - x_0^2 = \frac{r_0^2}{(1-\epsilon^2)^2} - \frac{\epsilon^2 r_0^2}{(1-\epsilon^2)^2} = \frac{r_0^2(1-\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^2}$

$$\Rightarrow b = \frac{r_0}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

* تعریف بیضی: نقاطی از فضا که جمع فاصله شون از ۲ کانون مقدار ثابتی باشد.

در حقیقت معادله‌ی $r = \dfrac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta}$ برای زمانی است که مبدأ مختصات روی یکی از کانون‌ها نشسته باشد.



از قانون کسینوس‌ها:

$$r'^2 = r^2 + 4x_0^2 - 4x_0 r\cos\theta$$

با جایگذاری r از معادله‌ی بیضی و تنظیم x_0 به چنین رابطه‌ای می‌رسیم (خودتون محاسبه کنید):

$$r'^2 = \left(r - \frac{2r_0}{1-\epsilon^2}\right)^2 \rightarrow r' = \pm\left(r - \frac{2r_0}{1-\epsilon^2}\right) = \pm(r-A)$$

چون برای $\epsilon<1$ داریم بررسی می‌کنیم، داخل پرانتز منفی است و چون r' فاصله است و باید مقداری مثبت باشد لذا علامت منفی قابل قبول است. پس:

$$r' = -(r-A) \rightarrow r'+r = A$$ (r همیشه از A کوچکتره)

و این دقیقاً همان تعریف بیضی است ✓

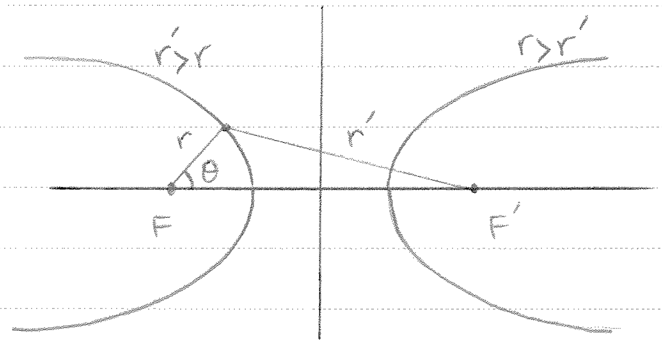
۲. برای $\epsilon>1$ هذلولی مکان هندسی نقاطی است که تفاضل فاصله‌ی آنها از دو نقطه (۲ کانون) مقدار ثابت باشد. محاسبات مربوط به هذلولی مثل آنچه بالا انجام شد است.

پس اگر $\epsilon>1$ باشد $(1-\epsilon^2)<0$ است و لذا داریم:

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$r' = r - \left(\frac{2r_0}{1-\epsilon^2} \right) \rightarrow$ یعنی علامت مثبت باید برای r' انتخاب شود

$\Rightarrow r' - r = \frac{2r_0}{\epsilon^2 - 1}$ و $r' > r \rightarrow$ این مربوط به نقاط روی شاخه‌ی چپ هذلولی است.



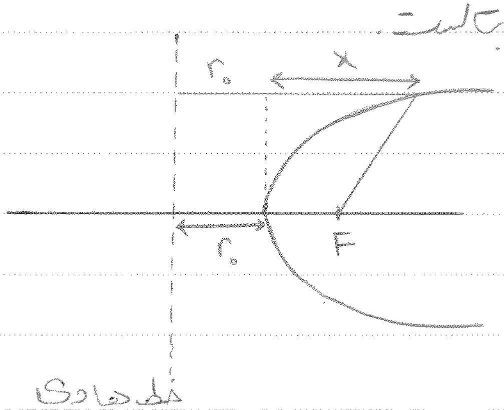
برای هذلولی هم تعریف x_0 چنین می‌شود:

$$x_0 = \epsilon \frac{A}{2} = \epsilon \frac{r_0}{\epsilon^2 - 1} \Rightarrow A = \frac{2r_0}{\epsilon^2 - 1}$$

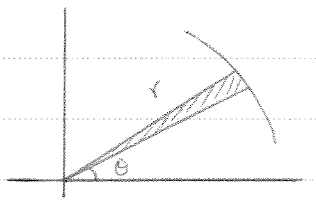
۴. برای $\epsilon = 1$ $\quad r = \frac{r_0}{1-\cos\theta}$

در این حالت شکلی داریم که هست مکان هندسی نقاطی که فاصله‌شان از یک خط و یک نقطه مقدار ثابت است.

$\rightarrow r - r\cos\theta = r_0 \rightarrow r = r_0 + x$



حال، بشنیم قانون ۳ کپلر را هم مستقیم در بیاریم؟ در حالت دایره داریم که $r_0^3 \propto T^2$ بود اما حالا مدارها بیضی اند. قانون دوم کپلر می‌گفت:



$$\frac{dA}{dt} = \text{ثابت} = \text{مساحت جاروب شده در زمان } t = \frac{l}{2\mu}$$

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ بود

حالا اگر جسم بیضی را دور بزند یعنی کل مساحت بیضی را جاروب کرده:

مساحت بیضی

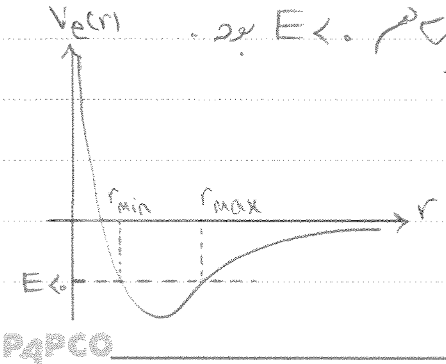
$$\pi ab = \int_0^T \left(\frac{dA}{dt}\right) dt = \frac{l}{2\mu} T$$

حالا a, b را که قبلاً حساب کردیم جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{l}{2\mu} T = \pi \left(\frac{r_0}{1-e^2}\right)\left(\frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}\right) = \frac{\pi r_0^2}{(1-e^2)^{3/2}} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲}}$$

$$\frac{l^2 T^2}{4\mu^2} = \frac{\pi^2 r_0^4}{(1-e^2)^3} = \frac{\pi^2 r_0^4}{\left(-\frac{2El^2}{\mu c^2}\right)^3}$$

یادتان نرود که داریم برای بیضی محاسبه می‌کنیم و در بیضی هم $E<0$ بود.



Subject:
Year. Month. Date. ( )

پس از ساده سازی $\rightarrow T^2 = \dfrac{\pi^2 \mu C^2}{(-2E^3)}$

$$A = \frac{2r_0}{1-\epsilon^2} = \frac{2\,\dfrac{l^2}{\mu C}}{\dfrac{2El^2}{\mu C^2}} = \frac{-C}{E}$$

برای تراوش

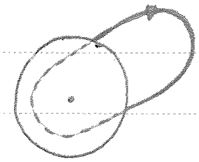
$$\Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2 \mu A^3}{2C} = \frac{\pi^2}{2(M+m)G} A^3$$

چراکه $\dfrac{\mu}{C} = \dfrac{\frac{mM}{M+m}}{GMm}$

نتیجه آنکه هر چقدر انرژی به صفر نزدیک تر شود، A که قطر بزرگ بیضی بود، بزرگتر می شود
چراکه با نزدیک شدن خط انرژی به صفر، فاصله ی r_{min} و r_{max} از هم زیاد می شود.
کپلر می گفت برای همه ی سیارات $T^2 \propto A^3$ است اما این حرف خیلی دقیق نیست.
و یک کمی تفاوت دارد. علت این تفاوت هم به خاطر جرم کاهیده است. اگر $m = \mu$ بود
آن وقت درست بود قانون ۳ کپلر. اما چون جرم سیارات نسبت به جرم خورشید خیلی ناچیز
است [بزرگترین آنها یعنی مشتری $\frac{1}{1000}$ جرم خورشید وزن دارد] عملاً حرف کپلر
درست است.

مسائلی از قبیل شلیک موشک، چرخش قمر دور سیاره ای، چرخش سیاره دور ستاره ای
و ... از این نوع اند که گفته شد (بیضی و هذلولی و سهمی). مثلاً مدار ستاره ی دنباله دار

هالی بیضی کشیده‌ای است که هر ۷۶ سال یک دور کامل می‌زند. یا مسیر موشک پرتابی



بیضی است که مرکز زمین در یکی از کانون‌هایش قرار دارد.

از دیگر مسائل این چنین مسائلی است که به «مانورهای ماهواره‌ای» معروفند.

مثلاً فرض کنید فضاپیمایی می‌خواهد روی ماه بنشیند. مسیر اولیه‌ی آن طوری تنظیم شده

که مثلاً روی یک مدار هذلولوی در حرکت است. حالا وقتی

به نقطه‌ی A می‌رسد باید موتوری روشن شود تا مقدار زاویه‌ای انرژی

آن را تغییر دهد به طوری که مسیر به بیضی تبدیل شود که ماه را قطع می‌کند.

به طور کلی دو ثابت حرکت، یعنی ℓ و E داریم به علاوه دو کمیت هندسی e و $2a$ که همه چیز را

تعیین می‌کنند (مشخصات مسیر). بنابراین می‌توان با ابزارهای مناسب انرژی و اندازه حرکت زاویه‌ای

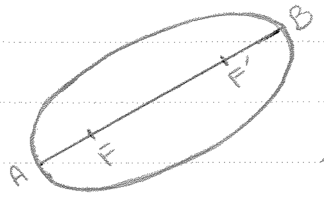
سیستم را تغییر دهیم و از خود سیستم که حالا مشخصات مدار جدید چیست انواع طراحی‌ها را

انجام دهیم.

توصیه می‌شود مثال 9.5 از کتاب کلپنر را بخوانید (صفحه‌ی 516).

با ۲ اصطلاح آشنا شویم: «شعاع حضیض» و «شعاع اوج».

Subject:
Year. Month. Date. ( )



فاصله‌ی FA شعاع حضیض نامیده می‌شود و

فاصله‌ی FB شعاع اوج. مثلاً برای سیارات که خورشید

در یکی از کانون‌های بیضی که مسیر حرکت سیاره به دور آن است، قرار دارد، کمترین فاصله‌ی

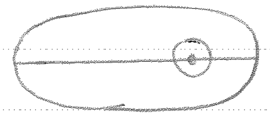
سیاره تا خورشید فاصله‌ی حضیض آن است و بیشینه‌ی فاصله‌ی سیاره با خورشید

شعاع اوج است.

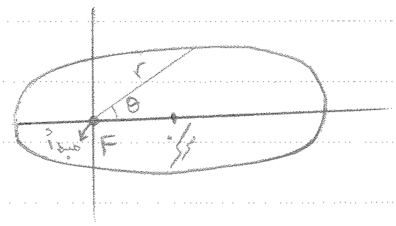
زمانی که از لفظ ارتفاع استفاده می‌شود، مثلاً ارتفاع حضیض زمین، باید برای بدست

آوردن r_{min} شعاع حضیض را با شعاع زمین جمع کرد. البته زمانی که زمین در کانون است

مثلاً ماهواره‌ای دور آن می‌چرخد.



باز یادآوری می‌شود که خورشید در کانون بیضی قرار دارد نه در مرکز آن.



رابطه‌ی $r = \frac{r_0}{1-e\cos\theta}$ هم برای زمانی است

که مبدأ روی کانون بیضی باشد.

نکته‌ی دیگر: بنابر قانون مساحت‌های برابر سرعت در حضیض باید بیشینه باشد.

در ضمن تنها جاهایی در نقاط حضیض و اوج که شعاع حامل عمود بر بردار سرعت است،

راحت‌تر محاسبه می‌شود که برابر است با $l = \mu r_{\text{حضیض}} v_{\text{حضیض}}$

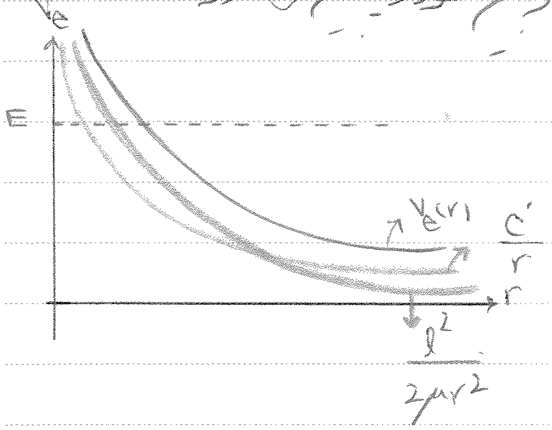
برای سایر نقاط l از روابط پیچیده‌تری حساب می‌شود.

جلسه‌ی ۲۹

اکنون به سراغ نیروی عکس مجذوری از نوع دافعه می‌رویم. if $c<0$

$\Rightarrow F(r) = \frac{c}{r^2}$ تغییر متغیر: $c' > 0 \to V(r) = \frac{c'}{r} \to V_e(r) = \frac{c'}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$

در rهای کوچک $\frac{1}{r}$ از $\frac{1}{r^2}$ قوی‌تر است بنابراین نمودار چنین می‌شود:



در rهای بزرگ اما برعکس می‌شود.

خود نمودار $V_e(r)$ در rهای بزرگ؟

$\frac{c'}{r}$ غالب می‌شود در rهای کوچک؟

$\frac{l^2}{2\mu r^2}$ غالب می‌شود. $V_e(r)$ در این شرایط برخلاف زمانی که نیرو جاذبه بود هیچ Smin ندارد. در نتیجه تنها انرژی مثبت برای آن امکان‌پذیر است. طبق $E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_e(r)$

چون همه جا $V_e(r) > 0$ است لذا باید تنها $E > 0$ باشد. تنها یک نقطه‌ی بازگشت داریم

لذا مسیر حرکت باز است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبات در این حالت عین همان محاسباتی است که برای مسیر جاذبه بررسی شد.

قبلاً از دو روش $r(t)$ را بدست آوردیم که یکی از آنها روش انتگرال مسیری بود $\ldots = \int d\theta$

در نهایت برای مسیر دافعه هم به همان نتایج می‌رسیم که $r = \dfrac{r_0}{1-\epsilon\cos\theta}$

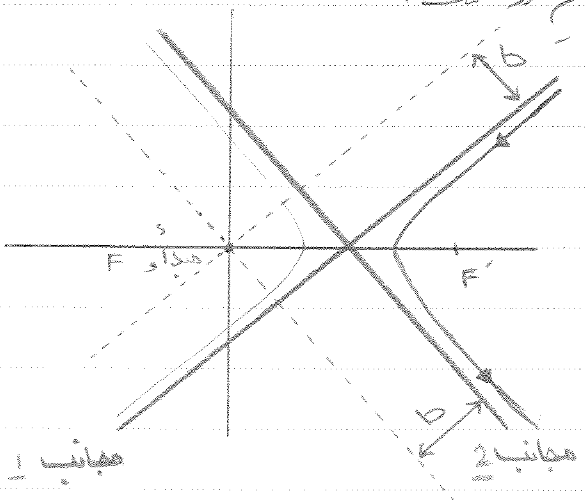
در بدست آوردن r_0 داشتیم $\pm\dfrac{l^2}{\mu C}$ که در اینجا چون $C<0$ باید علامت منفی را بگیریم $\rightarrow r_0 = \dfrac{l^2}{\mu C}$

برای مسیر دافعه چون تنها مقادیر مثبت E مجاز بود $\rightarrow \epsilon = \left[1+\dfrac{2El^2}{\mu C^2}\right]^{1/2}$

$C^2>0$ است لذا اجباراً ϵ باید بزرگتر از یک (1) باشد یعنی شکل مسیر هذلولی است

دیگر مسیر باز نخواهد بود. $E=0$ یعنی نقطه‌ی بازگشت در بی‌نهایت است و برای این نوع مسئله

$E=0$ هم بی‌معناست. شکل هذلولی کامل این طور است:



مسیر حرکت هم زمان که دو شاخه‌ی هذلولی نیست، تنها یکی از آنها خواهد بود.

محل تقاطع مجانب‌ها مرکز تقارن هذلولی است.

پس ذره داده از بی‌نهایت r به مرکز نیرو که در مبدأ است نزدیک می‌شود. اگر مرکز نیرو وجود نداشت

ذره در امتداد مجانب ۱ روی خط راست ادامه‌ی حرکت میداد. حال با فاصله‌ی امتداد مسیر ذره بدون نیروی مرکزی تا مرکز نیرو که همان b است، پارامتر برخورد می‌گوییم.

زمانی هم که مرکز نیرو ذره را دفع می‌کند، ادامه مسیر سمت ۲ نیمه‌ی مسیری که طی کرده متقارن است و باز هم با پارامتر برخورد b از مرکز نیرو دور می‌شود.

می‌توان نشان داد که اگر $C>0$ باشد نیروی مرکزی، عکس مجذور فاصله از نوع جاذبه باشد، آنگاه مسیر حرکت شاخه‌ی دیگر هذلولوی میشود (شاخه‌ی سمت چپ)

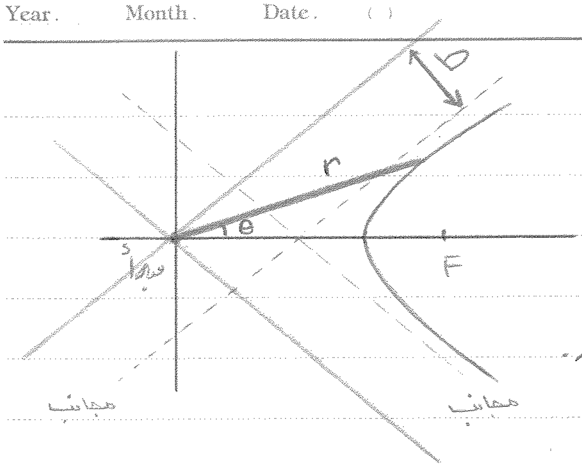
حالا تمرکز بیشتری می‌کنیم روی حرکت هذلولوی زمانی که نیروی مرکزی از نوع دافعه و عکس مجذوری

از این رابطه پیش‌تر بدست آوردیم $\rightarrow \dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{-\mu}{l^2}\dfrac{1}{u^2}F(u)$ و $F(u) = F(r) = \dfrac{c'}{r^2}$

$$\rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\mu}{l^2} r^2 F(r) = \frac{-\mu}{l^2}\left(r^2 \frac{c'}{r^2}\right) = \frac{-\mu c'}{l^2} \xrightarrow{r_0 = l^2/\mu c'}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-1}{r_0} \xrightarrow{\text{مانند قبل}} \text{حل}: u = \underbrace{\frac{-1}{r_0}}_{\text{جواب غیرهمگن}} + \underbrace{\frac{\epsilon}{r_0}\cos\theta}_{\text{جواب همگن}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} = \frac{-1+\epsilon\cos\theta}{r_0} \rightarrow r = \frac{r_0}{-1+\epsilon\cos\theta}$$



در یک لحظه که به مسیر نگاه کنیم، همچنین در یک

r ، θ ای .

کمینه ی r به ازای زاویه ی $\theta = 0$ اتفاق می افتد.

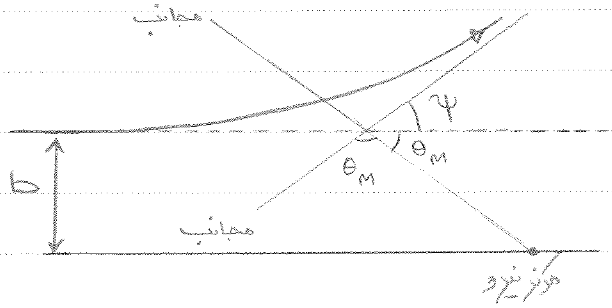
$$\theta = 0 \rightarrow r_{min} = \frac{r_0}{\epsilon - 1}$$

حالا در $\infty \rightarrow r$ در چه زاویه ای است؟ باید در عبارت $r = \frac{r_0}{-1 + \epsilon \cos\theta}$ مخرج را

برابر صفر قرار دهیم: $-1 + \epsilon\cos\theta = 0 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\epsilon}$

$$\Rightarrow r \rightarrow \infty \Rightarrow \theta_M = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

می توان مسئله را این طور هم بررسی کرد:



زاویه ی انحراف هدف مورد نظر ماست (ψ)

در $\infty \rightarrow r$ داریم $\theta = \theta_M$ پس زاویه ی مجانب ها با هم $= 2\theta_M$

$$\Rightarrow \psi = \pi - 2\theta_M \rightarrow \theta_M = \frac{\pi - \psi}{2}$$

$$\rightarrow \cos\theta_M = \sin\frac{\psi}{2} = \frac{1}{\epsilon}$$

ψ زاویه ی انحراف است.

تفسیر فیزیکی ← وقتی بار الکتریکی خودش کم شود انتظار داریم زاویه‌ی انحراف بیشتر شود .

اگر b بزرگ باشد زاویه‌ی انحراف کوچکتر خواهد شد . یعنی اگر فاصله زیاد باشد تاثیر نیرو

خیلی ذره منحرف نخواهد شد .

آزمایش معروف دیگری داریم به اسم «آزمایش رادرفورد» . مدل اتمی تامسون در آن زمان

مطرح بود که اتم ها را مثل کیکی در نظر می‌گرفت که کیک بارهای مثبت یکنواخت را شامل می‌شد و بارهای

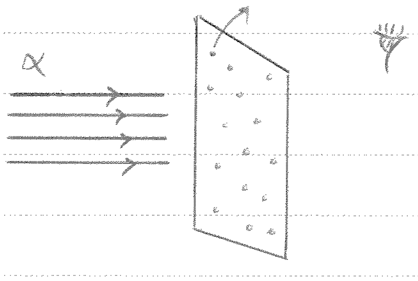
منفی کشمش های درون آن بودند . رادرفورد در آن زمان به ذرات α دست پیدا کرده بود ،

ذرات پر انرژی که از مواد رادیواکتیو ساطع می‌شد و خودشان بار الکتریکی دارند . او توانست

باریکه ای از ذرات α درست کند . او ورقه‌ی نازکی از طلا را توسط باریکه ای از ذرات α

مورد اصابت قرار داد ، و آن طرف ورقه آشکارسازی قرار داد .

هسته‌های طلا



او مشاهده کرد که ذرات زیادی بدون انحراف در آن طرف

ورقه آشکار شدند اما تعداد کمتری هم با زوایای انحراف بزرگ

دیده شدند . در واقع نبوغی که رادرفورد داشت این بود که برای مشاهده‌ی آنچه در فواصل ریز

وجود دارد باید به آنها شلیک شود . برای راهیابی به دنیای میکروسکوپی باید ببینیم از بیرون

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ذرات زیر چه اتفاقی آنها ساطع میشود و میانگین آنها تقریبا با هم و بیشتر چه فرمهایی را عبور میدهد

کدام یک را جذب می‌کند. این روشی است که هنوز بعد از 100 سال از زمان رادرفورد کاربرد دارد.

حالا برای اندازه گیری میزان انحراف با استفاده از رابطه‌ی $\cos\theta_M = \frac{1}{\epsilon}$ بدست بیاوریم.

$$\epsilon = \left[1 + \frac{2El^2}{\mu c'^2}\right]^{1/2} \rightarrow$$ در مثال رادرفورد: $c' = k\underbrace{q}_{\text{بار ذره‌ی } \alpha}\underbrace{Q}_{\text{بار هسته‌ی طلا}} = \underbrace{k}_{=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}(2e)(Ze)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\frac{\psi}{2}} = 1 + \cot^2\frac{\psi}{2} = \epsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{\mu c'^2}$$

$$\Rightarrow \cot^2\frac{\psi}{2} = \frac{2El^2}{\mu c'^2}$$

حال دوست داریم رابطه‌ی زاویه‌ی انحراف با پارامتر برخورد را پیدا کنیم. زمانی که ذرات α خیلی دور هستند از هسته‌های طلا انرژی همان انرژی جنبشی ذرات α است

$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$ و نیز $l = \mu b v_0$

پس جای l مقدار $\mu b v_0$ را می‌گذاریم:

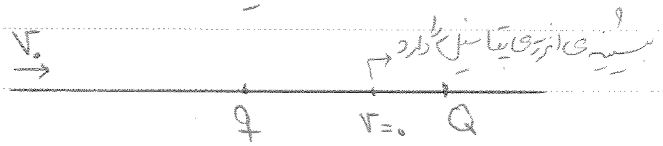
$$\cot^2\frac{\psi}{2} = \frac{2El^2}{\mu c'^2} = \frac{2E\mu^2 b^2 v_0^2}{\mu c'^2} = \frac{4b^2E^2}{c'^2} \Rightarrow \cot\frac{\psi}{2} = \frac{2bE}{c'}$$

Subject:
Year. Month. Date. ۱۸۷( )

E ، C' مقادیر ثابتی هستند پس معلوم می‌شود که میزان انحراف وابسته به b است.

اگر $b \to 0$ برود آنگاه $\psi = \pi$ خواهد بود زیرا $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ است. یعنی

اگر برخورد شاخ به شاخ باشد، ذره‌ی α انحراف 180° دارد و این یعنی روی مسیری که آمده

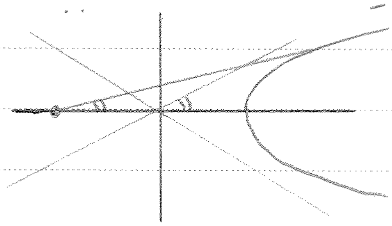


برمی‌گردد.

if $b \to \infty \xrightarrow{\text{آنگاه}} \psi \to 0$

در این حالت عملاً نیرویی حس نمی‌کند ذره‌ی α.

انحراف خیلی خیلی کوچک است. در فواصل خیلی دور زاویه‌ی مشخص شده باهم برابر خواهد بود:



اکنون می‌خواهیم پاسخ این سوال را بدهیم که اگر b به اندازه‌ی db تغییر کند، ψ چه میزان تغییر خواهد کرد؟

$$d\left(\cot\frac{\psi}{2}\right) = \frac{2E}{C'}\,db$$

$$\to \frac{-1}{\sin^2\frac{\psi}{2}}\, d\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{2E}{C'}\,db$$

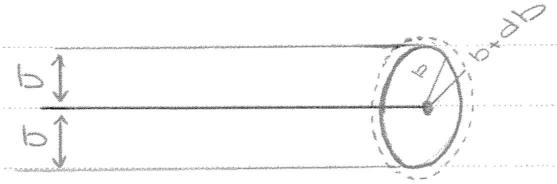
اینکه تغییرات ψ و b عکس هم است را فهمیدیم. در حال حاضر رابطه‌ی میان اندازه‌های

db ، $d\psi$ را می‌خواهیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بیایید هندسی به مسئله نگاه کنیم. ما به دنبال $(2\pi b\,db)$ هستیم که این همان تغییر سطح دایره است!

اگر دور مرکز پخش‌کننده دایره‌ای به شعاع b را بکشیم.



فرض کنید به ازای پارامتر برخورد b مقدار انحراف ψ باشد. همه‌ی ذراتی که در شعاع کوچک‌تر از b برخورد کرده‌اند زاویه‌ی انحرافشان از ψ بزرگتر است

آنهایی که در دایره‌ای به مساحت πb^2 به هدف برخورد کنند زاویه‌ی انحرافشان بیش از ψ است.

حالا اگر سطح این دایره را به اندازه‌ی شعاع db عوض کنیم، مساحت باریکه‌ی ایجاد شده برابر است با: $S = \pi b^2 \rightarrow dS = 2\pi b\,db$

حالا این ذراتی که در این باریکه به هدف برخورد کنند انحرافشان بین ψ و $\psi - d\psi$ خواهد بود

به dS، $d\sigma$ گوییم که آن سطح مقطع برخورد برای آنکه زاویه‌ی انحراف ذره‌ی تابیده بین ψ و $\psi - d\psi$ باشد.

$$\Rightarrow d\sigma = 2\pi\left(\frac{C'}{2E}\cot\frac{\psi}{2}\right)\frac{C'}{2E}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\psi}{2}}\,d\psi$$

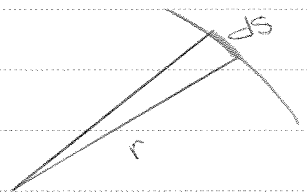
$$= 2\pi\,\frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\sin^3\frac{\psi}{2}}\,\frac{1}{2}\left(\frac{C'}{2E}\right)^2 d\psi$$

صورت و مخرج را در $2\sin\frac{\psi}{2}$ ضرب می‌کنیم:

[دانیم محاسبات اندازه ها بررسی شده اند بنابراین میدانیم که مبانی اش طبق اندازه‌ی $d\sigma$ ، ψ

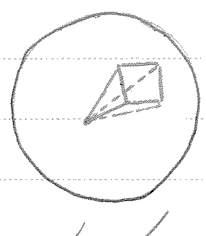
بوحیکم خواهد شد و علامت منفی دارد اما آن را حذف کردیم تا تنها اندازه ها بررسی شوند.]

$$d\sigma = \frac{1}{4}\left(\frac{C'}{2E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\psi}{2}} (2\pi)\sin\psi \, d\psi \quad ; \quad 2\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2} = \sin\psi$$



حالا از تعریف زاویه‌ی فضایی که بود $\frac{ds}{r^2} = d\Omega$

به $d\Omega$ عنصر زاویه‌ی فضایی گوییم.

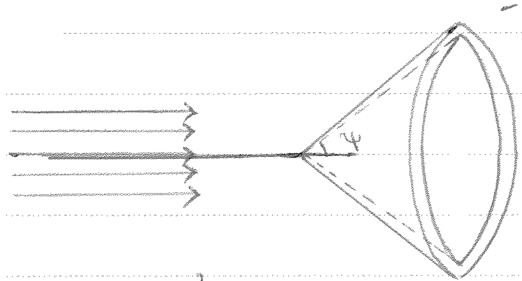


در مختصات کروی، عنصر سطح کره چنین است:

$$ds = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \rightarrow d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

که اگر روی ϕ انتگرال بگیریم $\rightarrow d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$

در مسئله‌ی سطح مقطع، زاویه‌ی قطبی را ψ نام نهادیم



پس ذره‌هایی که به سطح $d\sigma$ ضربه می‌خورند

زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ دارند:

$$d\sigma = \frac{C'^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\psi}{2}} d\Omega \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{سطح مقطع دیفرانسیلی} = \frac{C'^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\psi}{2}}$$

دانستن چیزی است که دقیقاً می‌توان در آزمایشگاه حساب کرد. اگر بیشتری از ذرات بیابانیم

چند درصد شون در زوایای بین θ و $\theta + d\theta$ منحرف می‌شوند که این قابل محاسبه است.

معلوم گرفته می‌شود که برای اینکه $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ حساب بشود ابتدا باید به کمیت دیگری محاسبه بشود.

بعد از محاسبه‌ی $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ می‌توان آن را برحسب θ رسم کرد و توزیع $\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$ خیلی معروف است و به آن "توزیع پراکندگی رادرفورد".

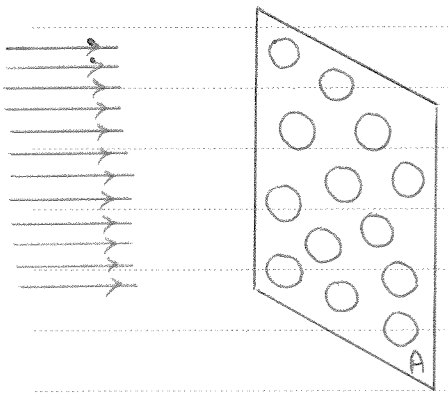
تعمیم بیشتر مفهوم سطح مقطع:

برای اندازه گیری مساحت کف دست یک راه این است که متر برداریم و اندازه بزنیم. یک راه هم اینه که فلش نور بتابونیم و سایه‌ی کف دست را اندازه بزنیم. زمانی که نور می‌تابونیم از خودمون می‌پرسیم چه مقدار از تابش‌ها جذب شدند و چه مقدار عبور کرده‌اند. اونهایی که جذب نشدند می‌خورند به دیوار و به اندازه‌ی σ کف دست هم جذب می‌شوند. حالا اگر این کار را با تاباندن پرتوهای x انجام دهیم اونوقت مساحت کف دست خیلی کمتر خواهد شد! زیرا اشعه‌ی x عمدتاً از دست عبور می‌کند. پس برای اشعه‌ی x این مساحتی که از دست روده می‌بینه با مساحت هندسی و ماکروسکوپیکی که میدیدیم حتماً یکی نیست.

پس اگر یک هدف داشته باشیم و باریکه‌ای به آن بتابد سطحی رو که تابش‌مون می‌بینه و

به هدف سطح مقطع هر شعاع به نوع و میزان برهمکنش با اتم دارد. هم چنین به مقدار انرژی تابنده. مثلاً اگر نوترینو به سطحی بتابانیم (کف دست) می گوییم سطح دست صفر است زیرا همه ی آنها قادر به عبور هستند.

مثال. فرض کنید روی یک دیوار تعدادی بشقاب کوبیده‌ایم که می خواهیم با اندازه گیری همه ی مساحت بشقابها را اندازه بگیریم. باریکه‌ای از ذرات رو به دیوار می تابانیم. ذره‌هایی که به بشقابها خورده‌اند ذره‌هایی هستند که جذب شده‌اند. هدف محاسبه ی سطح هر بشقاب است.



سطح کل دیوار A است به علاوه اینکه:

تعداد کل هدف‌ها $\rightarrow N_1$

$$\frac{N_1}{A} = n_1 =$$ تعداد هدف‌ها در واحد سطح

فرض می کنید سطح هر بشقاب σ باشد که می خواهیم حساب کنیم.

سطح کل هدف‌ها $= \sigma(n_1 A)$

تعداد کل ذراتی که به سطح تابیده می شوند $= N$

تعداد ذرات تابیده که به بشقابها برخورد کرده‌اند $= \Delta N$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

انتظار داریم:

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{N} = \frac{\text{سطح کل شبقاب‌ها}}{\text{کل سطح}} = \frac{n_1 A \sigma}{A}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{n_1}\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{N_1}\frac{\Delta N}{\left(\frac{N}{A}\right)}$$

برای یک مرکز اتلاف (اسیرود) $\rightarrow N_1 = 1 \Rightarrow$

$$\sigma = \frac{\Delta N}{\left(\frac{N}{A}\right)} = \frac{\text{تعداد ذراتی که برهم‌کنش کرده‌اند}}{\text{تعداد ذراتی که بر واحد سطح تابیده‌اند.}}$$

که $\left(\frac{N}{A}\right)$ تعداد ذرات که بر واحد سطح می‌تابند.

این یک مثال ملموسی بود که در آن ذراتی که هدف دور می‌بینند اوربیتالی هستند که برخورد می‌کنند.

حالا عمومی‌تر را تعریف می‌کنیم. اگر بخواهیم ببینیم که برای یک نوع خاص ذرات تابیده و یک هدف خاص، این ذرات چه سطحی از هدف را می‌بینند، اوربیتال‌هایی که با هدف برهم‌کنش می‌کنند اوربیتال‌هایی هستند که به سطح برخورد می‌کنند. پس برای هر نوع برهم‌کنشی می‌توان یک سطح تعریف کنیم که لزوماً سطح هندسی نیست. مثلاً برای نور مرئی سطح کف دست هست $15\,cm^2$ اما برای اشعه x مثلاً هست $\frac{1}{1000}(15\,cm^2)$.

در مثال حل شده فرض کردیم یک باریکه‌ای از اوربیتال به دیوار برخورد کرده‌اند تکه‌ای ستاره. حالا اگر

P4PCO

این حرکت استقرار داشته باشد یعنی یک شاری از ذرات تابیده داشته باشیم. اونوقت میتوانیم رابطه‌ای که بدست آمد را محدود کنیم به ذراتی که در یک ثانیه تابیده‌اند و σ را باید تعریف کنیم:

$$\sigma = \frac{\text{تعداد ذراتی که در هر ثانیه پراکندگی مورد نظر را می‌دهند}}{\text{(شار ذرات) تعداد ذراتی که در واحد زمان بر واحد سطح می‌تابند}}$$

در واقع اتفاقی که حالا این جا هست که داریم مفهوم احتمال را با کمیتی از جنس سطح (σ) مرتبط می‌کنیم. چیزی به سطح نخورد یعنی داره پراکندگی نمی‌کند. بنابراین برای اینکه بگوییم احتمال پراکندگی کردن چقدر است، می‌آییم می‌بینیم اونهایی که در این سطح می‌خورند پراکندگی می‌کنند. حالا در مثال‌های ذکر شده پراکندگی از نوع خاصی بود. اما در حالت کلی انواع پراکندگی‌ها را می‌توان داشت. در واقع برای هر رویدادی می‌توان یک سطح مقطع تعریف کرد. مثلاً می‌خواهیم سطح مقطع بشقاب‌هایی را پیدا کنیم برای ساچمه‌هایی که بخورند و بشقاب را ۲ تکه کنند. خب اندازه‌گیری این مفهوم کار سختی است اما می‌توانیم با یک مفهوم پراکندگی یک مفهوم سطح مقطع درست کنیم. به طوری که می‌آییم تعداد بشقاب‌هایی که ۲ تکه شده‌اند را می‌شماریم در واحد زمان و به شار ذراتی که تابیده شده تقسیم می‌کنیم.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

درضمن سطح مقطع کل از انتگرال گیری روی کل Ω ها بدست می آید:

$$\sigma_{\text{کل}} = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega$$

اگر برای مثال شکلها حساب کنیم متناسب با $\frac{1}{E^2}$ می شود و این یعنی هر چقدر انرژی ذرات تابنده بیشتر باشد، احتمال برخورد کمتر است. (احتمال انحراف کمتر)

از سطح مقطع کل و دیفرانسیلی می توان اطلاعاتی در مورد هدف کسب کرد که چه نوع برهمکنشی دارد.