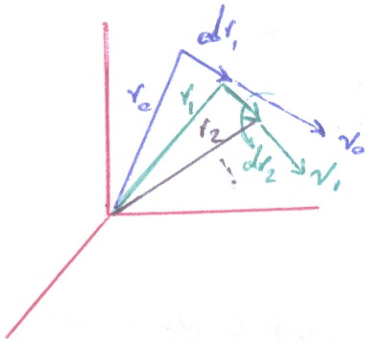
$$F = ma$$

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F \quad \text{(تابعی از مختصات ذره و سرعت آن و پارامترهای خارجی و محیط)}$$



$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots)$$

$$m\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots)$$

$$m\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots)$$

r_0 مکان اولیه

v_0 سرعت اولیه

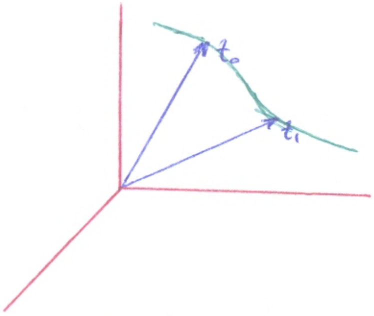
$$v = \frac{dr}{dt} \Rightarrow dr = v\,dt$$

$$dr_1 = v_0\,dt$$

$$dr_2 = v_1\,dt$$

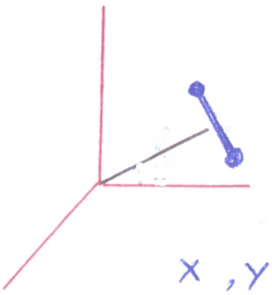
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow dv = \frac{\vec{F}}{m}\,dt$$

$$v_1 = v_0 + dv = \vec{v}_0 + \left(\frac{F}{m}\right)_0 dt$$



فرض کنید قیود هم در سیستم حضور داشته باشند

به عنوان مثال در شکل روبرو:



برای حل اینگونه مسائل باید از ابتدا مختصات مناسب را انتخاب کنیم

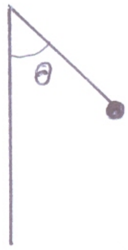
X, Y, Z, θ, φ مختصات مناسب

مختصات تعمیم یافته:

این مختصات عبارتند از مجموعه کمیتهایی که به طور **یکتا** وضعیت سیستم را مشخص می کنند

$$q_1(t), \dots, q_n(t)$$

مثال: آونگ مخروطی:



$\theta(t)$ $\varphi(t)$ $\longrightarrow$ مختصات مناسب برای تحلیل این سیستم (تعمیم یافته)

به تعداد کافی معادله شامل شتاب متغیرهای دستگاه (مختصات تعمیم یافته) می دهد $\longleftarrow$ قوانین نیرو + معادلات نیرو

$$\ddot{q}_1 = f_1(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, \dots)$$

$$\ddot{q}_2 = f_2(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n, \dots)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\ddot{q}_n = f_n(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n, \dots)$$

مثال: چرخ غلتان:

نیروی ثابت:

$x = R\theta$

F = ثابت

$$\left.\begin{aligned} \dot{v}_x &= \ddot{x} = \frac{F_x}{m} \\ \dot{v}_y &= \ddot{y} = \frac{F_y}{m} \\ \dot{v}_z &= \ddot{z} = \frac{F_z}{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_x(t) &= \left(\frac{F_x}{m}\right)t, v_{0x} \\ v_y(t) &= \left(\frac{F_y}{m}\right)t + v_{0y} \\ v_z(t) &= \left(\frac{F_z}{m}\right)t + v_{0z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_x}{m}\right)t^2 + v_x t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2}(F_y/m)t^2 + v_y t + y_0 \\ z(t) = \frac{1}{2}(F_z/m)t^2 + v_z t + z_0 \end{cases}$$

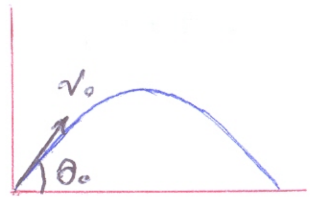
سه تا معادله دیفرانسیل حل کردیم، ۶ تا ثابت ظاهر شد؛ نکته این است که تا آنجا که امکان دارد از اضافه شدن ثابت ها جلوگیری کنیم

مثال: حرکت پرتابی:

$$x_0 = y_0 = 0$$

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta$$



برای آنکه ثوابت مسئله زیاد نشود مبدا مختصات را در x_0 ، y_0 ، z_0 قرار میدهیم

تذکر: رابطه $x = \frac{1}{2} a t^2$ تنها برای ... است که شتاب ثابت باشد

نیروهای تابع زمان:

$$m\ddot{x} = F_x(t)$$

$$\dot{v}_x = \frac{1}{m} F_x(t)$$

$$v_x(t) = \frac{1}{m}\int^t F_x(t')\,dt' + C_1$$

$$\begin{cases} t=0 \\ v_x(t) = v_{0x} \end{cases} \Rightarrow C_1 = ?$$

$$x(t) = \int v_x(t')\,dt' + C_2$$

$$\begin{cases} t=0 \\ x(t) = x_0 \end{cases} \Rightarrow C_2$$

$$x(0) = x_0$$

مختصات قطبی:

$$\ddot{\theta} = f(t)$$

$$\omega(t) = \dot{\theta} = \int^t f(t')\,dt' + C_1$$

$$\theta(t) = \int^t \omega(t')\,dt' + C_2$$

مثال: الکترونی با بار $-e$ تحت اثر میدان الکتریکی متغیر زیر قرار دارد

$$E = (E_0 \sin\omega t)\,\hat{e}_x$$

مطلوبست معادله حرکت (فرض کنید ذره در لحظه $t=0$ در مبدا مختصات است)

$$\vec{F} = -e\vec{E} = (-eE_0 \sin\omega t)\,\hat{e}_x \qquad \vec{F} = m\ddot{x}\,\hat{e}_x$$

$$m\ddot{x} = -eE\sin\omega t \Rightarrow m\dot{v}_x = -eE\sin\omega t$$

$$\dot{v}_x = \frac{-Ee}{m} \sin \omega t$$

$$v_x(t) = \frac{eE}{m\omega} \cos \omega t + C_1$$

C_1 ثابت $\Rightarrow 0 = \dfrac{eE}{m\omega} + C_1 \Rightarrow$

$$C_1 = \frac{-Ee}{m\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = \frac{eE}{m\omega}(\cos \omega t - 1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{eE}{m\omega}\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t - t\right) + C_2}$$

C_2 ثابت

$$0 = 0 - 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

نیروهای ضربه ای

مسئله یک بعدی:

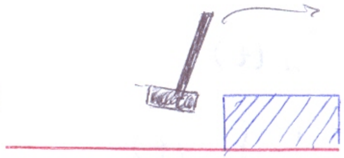
$$m \frac{dv}{dt} = F(t)$$

$$\int_{v_1}^{v_2} m\, dv = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, dt$$

$$\boxed{m(v_2 - v_1) = I}$$

ضربه

چکش



$[I] = ($ نیرو $)\,($ زمان $) = MLT^{-2}T = MLT^{-1}$

مسئله سه بعدی

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(t)$$

$$\int_{v_1}^{v_2} m\, dv = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt$$

$$\boxed{m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt}$$

تکانه

$$P = mv$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{dv}{dt} = m\vec{a} = \underbrace{\Sigma F}_{\text{نیروی برآیند}}$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

بنابراین

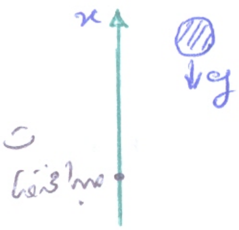
$$I = P_2 - P_1$$

نیروی وابسته به سرعت:

$$m\frac{dv}{dt}=F(v)$$

$$\int^{v}\frac{dv'}{F(v')}=\frac{1}{m}\int^{t}dt+C \Rightarrow v(t)\xrightarrow{\text{انتگرال گیری}}x(t)$$

مثال: فرض کنید نیروی مقاومت هوا متناسب با سرعت باشد (مثلاً: بررسی جسم در حال سقوط)



$$\vec{F}=-mg-b\vec{v}$$

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-bv \qquad \int\frac{dv}{g+\frac{b}{m}v}=-\frac{b}{m}\int dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(g+\frac{b}{m}v\right)=-\frac{b}{m}t+C$$

$$g+\frac{b}{m}v=\underbrace{e^{C}}_{A}\,e^{-b/m\,t}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{m}v=Ae^{-\frac{b}{m}t}-g$$

محاسبه ثابت A: فرض کنید ذره از ارتفاع h و در حال سکون رها می‌شود:

$$t=0 \quad v(0)=0 \Rightarrow 0=A-g \Rightarrow A=g \Rightarrow$$

$$\frac{b}{m}v=g\left(e^{-\frac{b}{m}t}-1\right) \Rightarrow \boxed{v=\frac{mg}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t}-1\right)}$$

$$x=\frac{mg}{b}\left(-\frac{m}{b}e^{-b/m\,t}-t\right)+C' \qquad h=-\frac{mg}{b^2}+C' \Rightarrow C'=h+\frac{m^2g}{b^2}$$

$$\boxed{x=h+\frac{m^2g}{b^2}\left(1-e^{-b/m\,t}\right)-\frac{mg}{b}t}$$

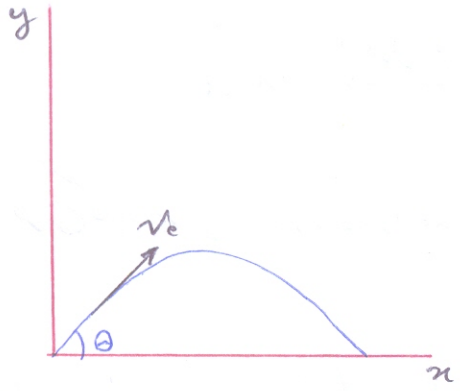
تندی حدی:

$$\text{if } t\to\infty \Rightarrow v_T=-\frac{mg}{b} \qquad F=-mg-bv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [b]=\frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}}=MT^{-1}$$

$$\left[\frac{b}{m}t\right]=$$ بدون بعد $\Leftarrow$ چون exp بعد ندارد.

بررسی حرکت پرتابی در حضور نیروی مقاوم هوا:



$$F = -bv$$

$$ma = -mg\,\hat{e}_y - bv = -mg\,\hat{e}_y - b(v_x\hat{x} + v_y\hat{y})$$

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}\hat{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{e}_y\right) =$$

$$= -bv_x\hat{e}_x - (mg + bv_y)\hat{e}_y \qquad \begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = -bv_x \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -bv_y - mg \end{cases}$$

$$\int_{v_0\cos\theta}^{v_x} \frac{dv'_x}{dx} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt' \Rightarrow \ln\left(\frac{v_x}{v_0\cos\theta}\right) = -\frac{b}{m}t \Rightarrow$$

$$\boxed{v_x = (v_0\cos\theta)\,e^{-\frac{b}{m}t}}$$

$$\int_{v_0\sin\theta}^{v_y} \frac{dv'_y}{v'_y + \frac{mg}{b}} = -\int_0^t \frac{b}{m}\,dt' \Rightarrow$$

$$\boxed{v_y = v_0\sin\theta\, e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{mg}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right)}$$

$$x = -\frac{m}{b}v_0\cos\theta\, e^{-b/m\,t} + c$$

$$y = \left(y_0\sin\theta + \frac{mg}{b}\right)\left(-\frac{m}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b}t + c_2$$

در لحظه $t=0$ ، $x_0=0$, $y_0=0$

$$0 = -\frac{m}{b}v_0\cos\theta + c_1$$

$$0 = -\frac{m}{b}\left(v_0\sin\theta + \frac{mg}{b}\right) + c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{mv_0\cos\theta}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \\ y &= \frac{m}{b}\left(v_0\sin\theta + \frac{mg}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) - \frac{mg}{b}t \end{aligned}}$$

محاسبه برد پرتابه و زمان پرواز:

حرکت پرتابی معمولی
$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\theta)\, t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\theta)\, t \end{cases}$$

اگر b بسیار کوچک باشد $\Leftarrow$

$$T_0 = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

$y = 0 \Rightarrow t = T$

$$\frac{m}{b}\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{b}{m}T}\right) - \frac{mg}{b} T = 0$$

$$T = \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g} + \frac{m}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{b}{m}T}\right)$$

$$\text{if } \frac{b}{m} T_0 \ll 1 \Leftarrow \frac{2 v_0 \sin\theta\, b}{mg} \ll 1 \Leftarrow b v_0 \ll mg$$

نیروی مقاومت هوا کوچک

تصحیح نسبت به حالتی که مقاومت هوا نداریم را تا اولین مرتبه انجام می‌دهیم

$$T = \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g} + \frac{m}{b}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{b}{m} T + \frac{1}{2}\frac{b^2}{m^2} T^2 + \frac{1}{6}\frac{b^3}{m^3} T^3\right)\right]$$

$$T = \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g} + \frac{m}{b}\right)\left(\frac{b}{m} T - \frac{b^2}{2m^2} T^2 + \frac{1}{6}\frac{b^3}{m^3} T^3\right)$$

$$T = \left(\frac{b v_0 \sin\theta + mg}{bg}\right)\left(\frac{b}{m} - \frac{b^2}{2m^2} T + \frac{1}{6}\frac{b^3}{m^3} T^2 + \cdots\right)$$

$$\frac{bg}{b v_0 \sin\theta + mg} = \frac{b}{m} - \frac{b^2}{m^2} T + \frac{b^3}{6m^3} T^2$$

$$\frac{b^2}{2m^2} T = \frac{b}{m} - \frac{bg}{b v_0 \sin\theta + mg} + \frac{b^3}{6m^3} T^2 = \frac{b^2 v_0 \sin\theta + bmg}{m(b v_0 \sin\theta + mg)} + \frac{b^3}{6m^3} T^2$$

$$T = \frac{2m v_0 \sin\theta}{m(b v_0 \sin\theta + mg)} + \frac{b}{3m} T^2 \Rightarrow T = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g + \frac{b v_0 \sin\theta}{m}} + \frac{b}{3m} T^2$$

$$T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g\left(1 + \frac{b v_0 \sin\theta}{mg}\right)} + \frac{b}{3m} T^2$$

T_0

بسیار کوچک

$$\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \cdots$$

$$\Rightarrow T = T_0\left(1 - \frac{b v_0 \sin\theta}{mg}\right) + \frac{b}{3m} T_0^2$$

تقریب مرتبه اول T

$$T = T_0\left(1 - \frac{b v_0 \sin\theta}{mg} + \frac{2 b v_0 \sin\theta}{3mg}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T = T_0\left(1 - \frac{1}{3}\frac{b v_0 \sin\theta}{mg}\right)} , \boxed{\Delta T = T_0\left(\frac{1}{3}\frac{b v_0 \sin\theta}{mg}\right)}$$

تقریب $T = T_0 + \Delta T + (\Delta T)^2 + \cdots$

$$\frac{b}{3m} T^2 \longrightarrow \frac{b}{3m}(T_0 + \Delta T)^2$$

$$\frac{b}{3m} T_0^2\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 = \frac{b}{3m} T_0^2\left(1 + 2\frac{\Delta T}{T_0}\right)$$

$R = (v_0 \cos\theta) T \Rightarrow$ در حالت بدون مقاومت

$$\Rightarrow R = (v_0 \cos\theta)\left(\frac{2 v_0 \sin\theta}{g}\right) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

تقریب می‌زنیم

$$R = \frac{m v_0}{b}\cos\theta\left[1 - \left(1 - \frac{b}{m}T + \frac{b^2}{2m^2}T^2 + \cdots\right)\right] =$$

$$= \frac{m v_0 \cos\theta}{b}\left[\frac{b}{m}T - \frac{b^2}{2m^2}T^2\right] = (v_0 \cos\theta)\, T\left(1 - \frac{b}{2m}T\right)$$

$$= (v_0 \cos\theta)\, T_0\left(1 - \frac{1}{3}\frac{b v_0 \sin\theta}{mg}\right)\left[1 - \frac{b}{2m}\frac{2 v_0 \sin\theta}{g}\right] \Rightarrow$$

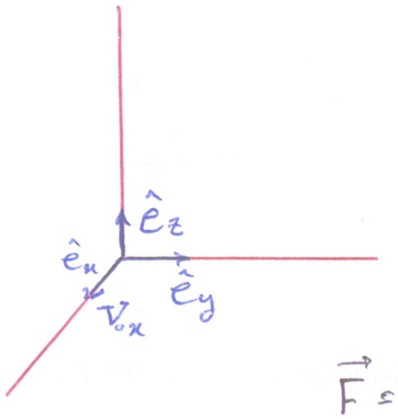
$$R = R_0\left(1 - \frac{1}{3}\frac{b v_0 \sin\theta}{mg} - \frac{b v_0 \sin\theta}{mg}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{R = R_0\left(1 - \frac{4}{3}\frac{b v_0 \sin\theta}{mg}\right)}$$

تصحیح برد پرتابه

$\textcircled{5}$

حرکت ذره باردار در میدان مغناطیسی :



$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_y$$

شرایط اولیه

$$x_0 = 0 \qquad v_{0x} = 0$$
$$z_0 = 0 \qquad v_{0z} = 0$$
$$y_0 = 0 \qquad v_{0y} = 0$$

$$\vec{F} = q v \times B = q(v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z) \times B \hat{e}_y$$

$$\Rightarrow F = m \frac{d\vec{v}}{dt} = qBv_x \hat{e}_z - qBv_z \hat{e}_x$$

معادلات جفتیده هستند

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{qB}{m} v_z \\[2ex] \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{qB}{m} v_x \end{cases} \qquad \frac{dv_y}{dt} = 0 \Rightarrow v_y = v \qquad \frac{qB}{m} = \omega_0$$

$$\boxed{y = vt}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\frac{qB}{m}\frac{dv_z}{dt} = \left(-\frac{qB}{m}\right)\left(\frac{qB}{m}\right) v_x$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_0^2 v_x \Rightarrow v_x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

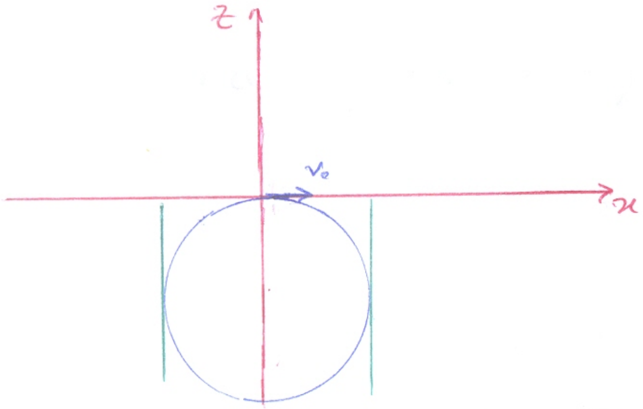
$$v_z = -\frac{1}{\omega_0}\frac{dv_x}{dt}$$

$$v_z = -A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$t = 0 \qquad v_0 = B \qquad -A = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos \omega_0 t \\ v_z = v_0 \sin \omega_0 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + C_1 \\[2ex] z(t) = -\dfrac{v_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t + C_2 \end{cases}$$

$$t = 0 \rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$
$$t = 0 \rightarrow z = 0 \Rightarrow C_2 = v_0/\omega_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = v_0/\omega_0 \sin \omega_0 t} \\[2ex] \boxed{z = \dfrac{v_0}{\omega_0}(1 - \cos \omega_0 t)} \end{cases}$$



جلسه 12

نیروی وابسته به مکان :

$F = F(x)\,\hat{e}_x$

$m\vec{a} = F(x)\,\hat{e}_x$

$$\begin{cases} a_y = 0 & v_y = v_{0y} = 0 \\ a_z = 0 & v_z = v_{0z} = 0 \end{cases}$$

مسئله تک بعدی

$$m\frac{dv}{dt} = F(x) \Rightarrow mv\frac{dv}{dt} = v\,F(x) \Rightarrow mv\,dv = (\underbrace{v\,dt}_{dx})\,F(x)$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} mv'dv' = \int_{x_0}^{x} F(x')\,dx'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv'^2\Big|_{v_0}^{v} = W_{x_0\to x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= W_{x_0\to x} \\ \Delta K &= W_{x_0\to x} \end{aligned}} \Longrightarrow$$

قضیه کار - انرژی

$$\Delta P = \int F(t)\,dt = I_{t_0\to t}$$

توجه شود که انتگرال مکانی تغییرات انرژی جنبشی را

نتیجه داد و انتگرال زمانی تغییرات اندازه حرکت

پتانسیل : همواره برای یک تابع وابسته به مکان و خوش رفتار و هموار می توان

یک $V(x)$ یافت به گونه ای که

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

$$\int_{v_0}^{v} mv'dv' = \int F(x')\,dx' = -\int_{V(x_0)}^{V(x)} dV'$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(V - V_0) = -\big(V(x) - V(x_0)\big) = -\Delta V$$

$\Delta K = -\Delta V \qquad \Delta(K+V) = 0 \qquad K + V = E =$ ثابت

$$\boxed{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E}$$

قانون پایستگی انرژی مکانیکی

در یک نظریه دینامیکی دلخواه $\quad q_1(t) \dots q_N(t)$

حتی میتوانند برحسب پیوسته داشته باشند $\quad H(q_1 \dots q_N, \dot q_1, \dots, \dot q_N, \dots) =$ ثابت

به عبارت دیگر $\quad \frac{dH}{dt} = 0$

آنگاه H ثابت حرکت است

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

$$m\ddot x = F(x) \qquad \underbrace{-\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}} = -\dot x \frac{dV}{dx}$$

$$m\ddot x \dot x = \dot x F(x) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot x^2\right) = -\frac{d}{dt}(V(x)) \qquad \dot x F(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}m\dot x^2 + V(x)\right)}_{\text{ثابت}} = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot x^2 + V(x)$$

از یک معادله درجه 2 به یک معادله درجه 1 رسیده‌ایم می‌گوییم انتگرال اول حرکت را محاسبه کرده‌ایم

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \pm \int dt$$

مثال: نیروی وزن:

$$m\ddot y = -mg \qquad m\dot y \ddot y = -mg\dot y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot y^2\right) = -\frac{d}{dt}(mgy)$$

$$\frac{1}{2}mg\dot y^2 + mgy = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow V(y) = mgy \qquad \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - mgy)}$$

$$\int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{\frac{2E}{m}-2gy'}} = \pm\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow \frac{-1}{2g}\int_0^y \frac{-2g\,dy'}{\sqrt{\frac{2E}{m}-2gy'}} = \int_{t_0}^{t} dt =$$

$$= -\frac{1}{g}\int_0^y d\left(\frac{2E}{m}-2gy'\right)^{\frac{1}{2}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

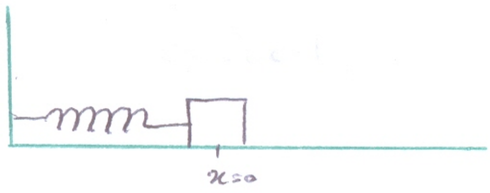
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{m}-2gy'}\Big|_0^y = -g(t-t_0) \qquad \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{m}-2gy} - \sqrt{\frac{2E}{m}} = -g(t-t_0)$$

$$\sqrt{\frac{2E}{m}-2gy} = -gt + \underbrace{\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}+gt_0\right)}_{\alpha} \Rightarrow \frac{2E}{m}-2gy = (-gt+\alpha)^2$$

$$\Rightarrow 2gy = \frac{2E}{m} - (g^2t^2+\alpha^2-2g\alpha t)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + \underbrace{\alpha}_{\text{ثابت}}\,t + \underbrace{\left(\frac{E}{mg}-\frac{\alpha^2}{2g}\right)}_{y_0}}$$

مثال:



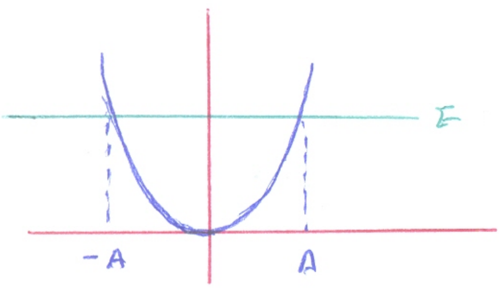
$$F(x) = -kx$$

$$m\ddot{x} = -kx \qquad m\ddot{x}\dot{x} = -kx\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2+C\right)$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Leftarrow \text{if } C=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \qquad \frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 = E = \text{ثابت}$$



$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}$$

ذره‌ای با انرژی E مجاز به حرکت در ناحیه $-A\leqslant x\leqslant A$

$x=\pm A$ نقاط بازگشت هستند

نقاط $x=\pm A$ حل رابطه مقابل $E-V(x)=0$ هستند

در نقطه $x=A$ داریم $E=\frac{1}{2}kA^2$

توجه: از منحنی پتانسیل می‌توان اطلاعات خوبی راجع به حرکت بدست آورد

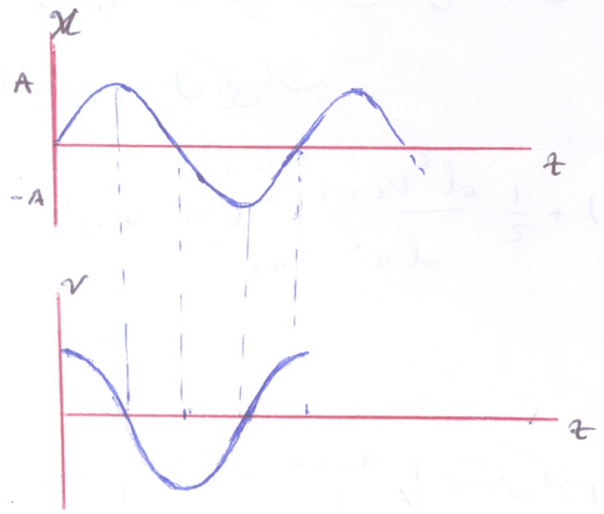
$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kA^2-\frac{1}{2}kx^2\right)}=\pm\sqrt{A^2-x^2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}=\omega \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=\pm\int\omega\, dt$$

$$t=0 \quad x=0 \qquad \int\frac{dx'}{\sqrt{A^2-x'^2}}=\omega\int_0^t dt'$$

$$\sin^{-1}\frac{x'}{A}\Big|_0^x=\omega t \Rightarrow x=A\sin\omega t$$

$$v=A\cos(\omega t)$$

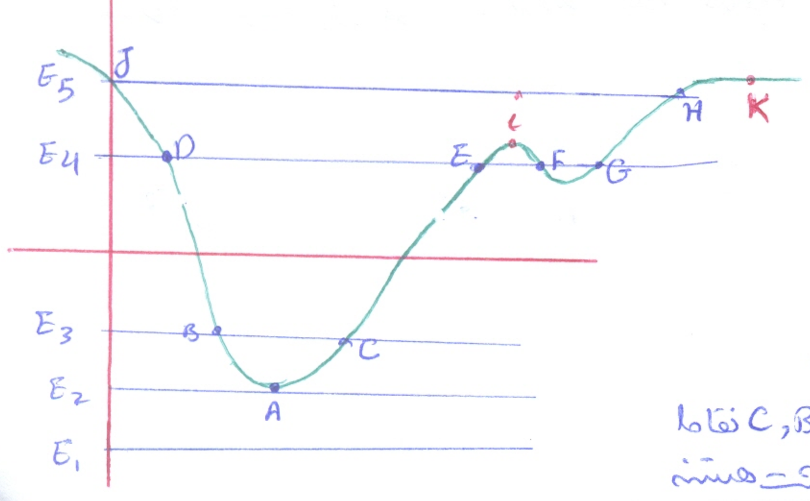


$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$A \equiv$ دامنه نوسان

$\omega \equiv$ بسامد زاویه‌ای

در حالت کلی:



A: $F=0 \Leftarrow \frac{dV(x)}{dx}=0$ لذا نقطه تعادل است

نقطه A کمینه پتانسیل است

E_1: مقدار انرژی غیرمجاز $E<V_{min}$

E_2: $E=V_{min}$ فقط ذره در نقطه A می‌ایستد

E_3: ذره تنها بین B و C حرکت نوسانی دارد نقاط B,C نقاط بازگشت هستند

E_4 : ذره یا می‌تواند بین C و D باشد یا بین F و G

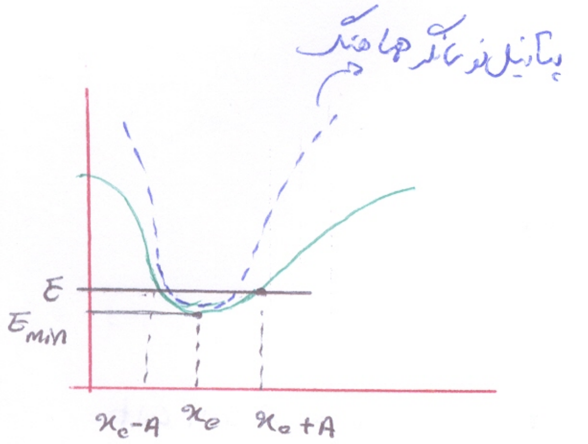
E_5 : ذره در نقطه A بیشینه انرژی جنبشی را خواهد داشت و در c کمینه آن را و بین H و J حرکت خواهد کرد.

نقطه A تعادل پایدار است

نقطه c تعادل ناپایدار است

نقطه k تعادل بی تفاوت است

تقریب با پتانسیل نوسانگر هماهنگ



فرض کنیم انرژی کل بیش از E_{min} باشد

می‌خواهیم معادله یک سهمی را پیدا کنیم به طوری که در نقطه x_0 خود آن و مشتق اول و دومش با منحنی پتانسیل یکی باشد

$$V(x) = V(x_0) + \left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x_0}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow V(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2$$

پتانسیل فنر

می‌توانیم مبدا را منتقل کنیم $\begin{cases} x_0 = 0 \\ V(x_0) = 0 \end{cases}$

بنابراین هر پتانسیل دلخواه را در نزدیک نقطه تعادلش می‌توان با نوسانگر هماهنگ تقریب زد

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_e)^2$$

$$x = A\sin\omega t + x_0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , k = \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_0}}}$$

$\Rightarrow$ بسامد نوسان‌های کوچک حول نقطه تعادل پایدار

جلسه 13

معرفی چند بسط مفید

$$\frac{1}{1-\epsilon} = 1+\epsilon+\epsilon^2+\cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \qquad \cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5}{1-\frac{1}{2}x^2+\cdots} \simeq \frac{1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+\cdots}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots}x$$

$$\simeq \underbrace{x\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)}_{\text{تا جمله دوم بسط نوشتیم}} = x\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x^2\right) = x+\frac{1}{3}x^3$$

اگر بخواهیم جمله سوم را نیز بنویسیم

$$x\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4\right)\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4\right] =$$

$$= x\left[1+\frac{1}{3}x^2+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{120}+\frac{5}{24}\right)x^4\right] = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{10}x^5$$

$$(1+\epsilon)^n = 1+n\epsilon+\frac{n(n-1)}{2!}\epsilon^2$$

مثال: بسط $\sin\theta$ حول θ_0

$$\sin(\theta_0+\epsilon) = \sin\theta_0\cos\epsilon + \cos\theta_0\sin\epsilon \simeq \sin\theta_0 + \epsilon\cos\theta_0$$

$$\cos(\theta_0+\epsilon) = \cos\theta_0\cos\epsilon - \sin\theta_0\sin\epsilon \simeq \cos\theta_0 - \epsilon\sin\theta_0$$

مثال: $\ln(1+\epsilon)$

$$\frac{1}{1+\epsilon} = 1-\epsilon+\epsilon^2\cdots \qquad \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots \Rightarrow \ln(1+x) = C+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

تعیین C

$$x=0 \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots \qquad \ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots$$

نیروهای وابسته به مکان در سه بعد:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\,\hat{e}_x + F_y(x,y,z)\,\hat{e}_y + F_z(x,y,z)\,\hat{e}_z$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \rightarrow \quad m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

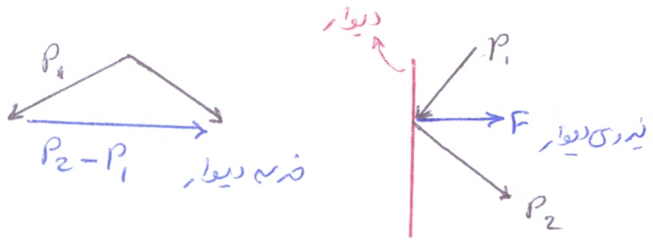
$$\int m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m v\cdot v \qquad d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m v\cdot dv$$

$$\Rightarrow \int_{k_A}^{k_B} dk = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \Delta k = k_B - k_A = W_{A\to B}$$

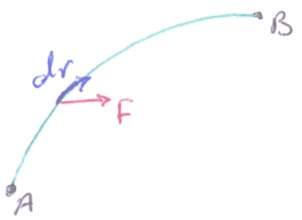
کار نیروی F در جابجایی از نقطه A تا B

$$\vec{P} = m\vec{v} \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}(t) \qquad \int dp = \int \vec{F}(t)\cdot dt \Rightarrow \Delta\vec{P} = \int \vec{F}\,dt$$



$P = mv \rightarrow$ تغییراتش با انتگرال زمانی نیرو برابر است

$k = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow$ تغییراتش با انتگرال مکانی نیرو برابر است



در سه بعد:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

در حالت کلی نتیجه انتگرال می‌تواند به مسیر وابسته باشد

$$= \int [F_x(\quad)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(\quad)dz]$$

$x = x(s)$
$y = y(s)$
$z = z(s)$

فرض کنید معادلات پارامتری مسیر به فرم روبرو باشد

s پارامتر مسیر است

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_{s_A}^{s_B} \left[F_x(x,y,z)\frac{dx}{ds} + F_y(\quad)\frac{dy}{ds} + F_z(\quad)\frac{dz}{ds}\right]$$

نیروهای پایستار:

اگر یک تابع $V(x,y,z)$ داشته باشیم به گونه ایکه

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_A^B \left(-\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) =$$

$$= -\int_A^B dV \rightarrow$$ دیفرانسیل کامل

$$\boxed{dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz} \rightarrow$$ دیفرانسیل کامل

$$\int_A^B dV = V(x_B, y_B, z_B) - V(x_A, y_A, z_A)$$

یعنی مسیر مهم نیست

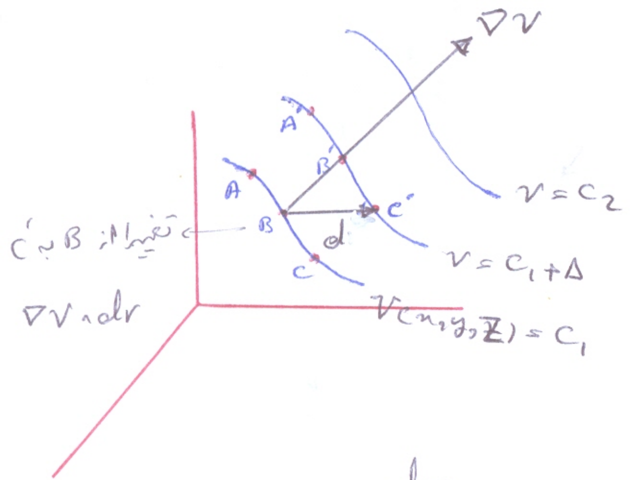
نیرویی که انتگرال آن روی مسیر به مسیر وابسته نباشد نیروی پایستار است

$V(x,y,z) \longrightarrow$ انرژی پتانسیل متناظر با نیروی F

$$K_B - K_A = -\int_A^B dV = -(V_B - V_A) \qquad K_B + V_B = K_A + V_A$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta K + \Delta V = 0} \Rightarrow \Delta E = 0$$

$$E = K + V$$



گرادیان

سطوح هم پتانسیل هستند

∇V : جهتی را نشان می دهد که سریع ترین نرخ تغییرات پتانسیل جهت است

$$|\nabla V| = \frac{dV}{d\lambda}$$

اگر یک مختصه در راستای بردار گرادیان تعریف کنیم مثل λ

$$\Rightarrow \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z$$

if $\boxed{F = -\nabla V}$ نیروی F پایستار است

مختصات استوانه‌ای:

$V = V(\rho, \varphi, z)$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad , \quad d\vec{r} = d\rho\, \hat{e}_\rho + \rho\, d\varphi\, \hat{e}_\varphi + dz\, \hat{e}_z$$

$$\boxed{\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{e}_z}$$

مختصات کروی

$$\boxed{\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi}$$

تمرین: عبارت گرادیان در مختصات کروی را بدست آورید

کرل:

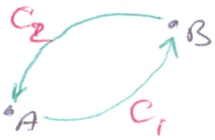
$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_x}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial f_z}{\partial y} = \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times F = 0}$$

قضیه استوکس

$$\oint F \cdot dr = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$



$$\text{if } \nabla \times F = 0 \Rightarrow \oint_C F \cdot dr = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{A, C_1}^{B} F \cdot dr + \int_{B, C_2}^{A} F \cdot dr = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A, C_1}^{B} F \cdot dr = \int_{A, C_2}^{B} F \cdot dr$$

۱۵

$$F = F_1 + F_2 + \cdots \qquad W_F = \int_A^B F \cdot dr = \int_A^B F_1 \cdot dr + \int_A^B F_2 \cdot dr + \cdots$$

$$= W_{F_1} + W_{F_2} + \cdots$$

$$\Delta K = W_{F_1} + W_{F_2} + \cdots = \underbrace{W_C}_{\text{پایستار}} + \underbrace{\cancel{W_{\text{قیدی}}}}_{0} + \underbrace{W_{nc}}_{\text{غیرپایستار}}$$

فرض کنید F_1 و F_2 پایستار باشند

$$F_1 = -\nabla V_1 \Rightarrow W_{F_1} = -\Delta V_1$$

$$F_2 = -\nabla V_2 \Rightarrow W_{F_2} = -\Delta V_2 \qquad W_{F_1} + W_{F_2} = -\Delta (V_1 + V_2)$$

توجه: کار نیروهای قیدی صفر است (مثل کار نیروی عمودی سطح روی سطح افقی)

جلسه ۱۴