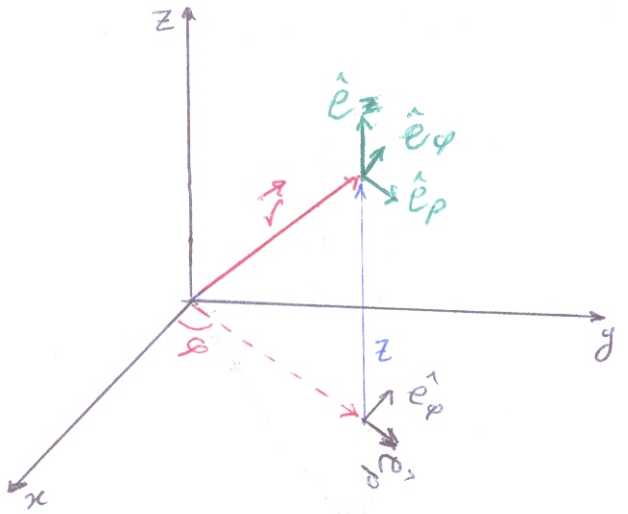
(1)

جلسه ششم

انرژی جنبشی در مختصات استوانه‌ای :

$$v = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)}$$



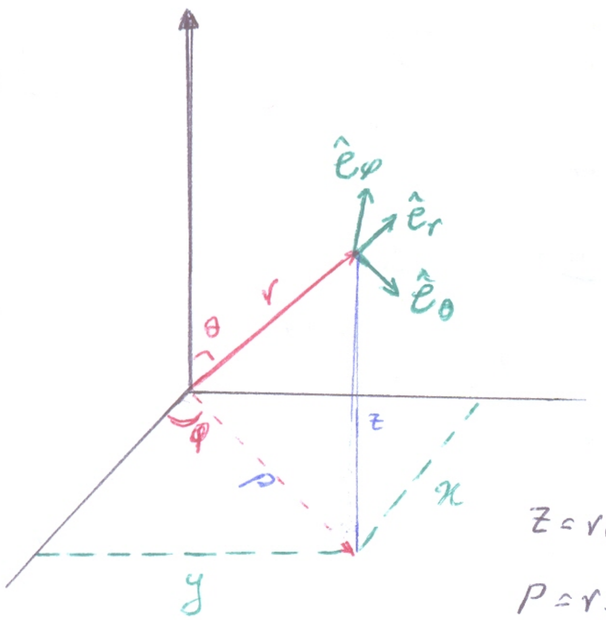
$$e_\rho \times e_\varphi = \hat{e}_z$$

$$r = \rho\,\hat{e}_\rho + z\,\hat{e}_z$$

مختصات کروی :

r, θ, φ

$0 \leq \theta \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$



$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi)\,\hat{e}_x + (r\sin\theta\sin\varphi)\,\hat{e}_y + (r\cos\theta)\,\hat{e}_z$$

$z = r\cos\theta$

$\rho = r\sin\theta$

$x = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi$

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(\dot r\sin\theta\cos\varphi+r\dot\theta\cos\theta\cos\varphi-r\dot\varphi\sin\theta\sin\varphi)\,\hat{e}_x+$$

$$+(\dot r\sin\theta\sin\varphi+r\dot\theta\cos\theta\sin\varphi+r\dot\varphi\sin\theta\cos\varphi)\,\hat{e}_y+$$

$$+(\dot r\cos\theta-r\dot\theta\sin\theta)\,\hat{e}_z\Rightarrow$$

$$\vec{V}=\dot r(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y+\cos\theta\,\hat{e}_z)+$$

$$r\dot\theta(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x+\cos\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y-\sin\theta\,\hat{e}_z)+r\sin\theta\dot\varphi(-\sin\varphi\,\hat{e}_x+\cos\varphi\,\hat{e}_y)$$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{V}=\dot r\,\hat{e}_r+r\dot\theta\,\hat{e}_\theta+r\dot\varphi\sin\theta\,\hat{e}_\varphi}\quad !?\quad\xrightarrow{\text{توضیح}}$$

سرعت در مختصات کروی

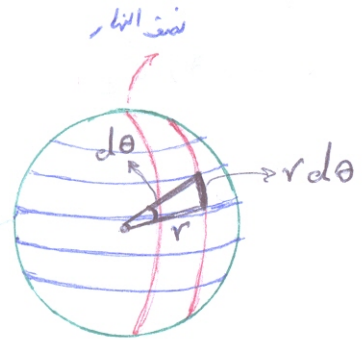
$\hat{e}_r=\frac{\vec{r}}{r}\Rightarrow$ $\boxed{\hat{e}_r=(\sin\theta\cos\varphi)\,\hat{e}_x+(\sin\theta\sin\varphi)\,\hat{e}_y+\cos\theta\,\hat{e}_z}$

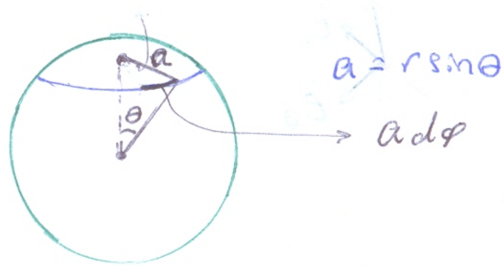
$\vec{r}=r\hat{e}_r$ $\boxed{\hat{e}_\varphi=(-\sin\varphi)\,\hat{e}_x+(\cos\varphi)\,\hat{e}_y}$

$$\hat{e}_\theta=\hat{e}_\varphi\times\hat{e}_r=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{e}_\theta=(\cos\varphi\cos\theta)\,\hat{e}_x+(\sin\varphi\cos\theta)\,\hat{e}_y-(\sin\theta)\,\hat{e}_z}$$

توضیح:





جابجایی در جهت θ $\equiv r\,d\theta$

جابجایی در جهت φ $\equiv r\sin\theta\,d\varphi$

جابجایی در جهت r $\equiv dr$

$$V=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{dt}\hat{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta+r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\hat{e}_\varphi$$

$$dr=dr\,\hat{e}_r+(r\,d\theta)\,\hat{e}_\theta+(r\sin\theta)\,d\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

انرژی جنبشی :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi^2)}$$

انرژی جنبشی در مختصات کروی

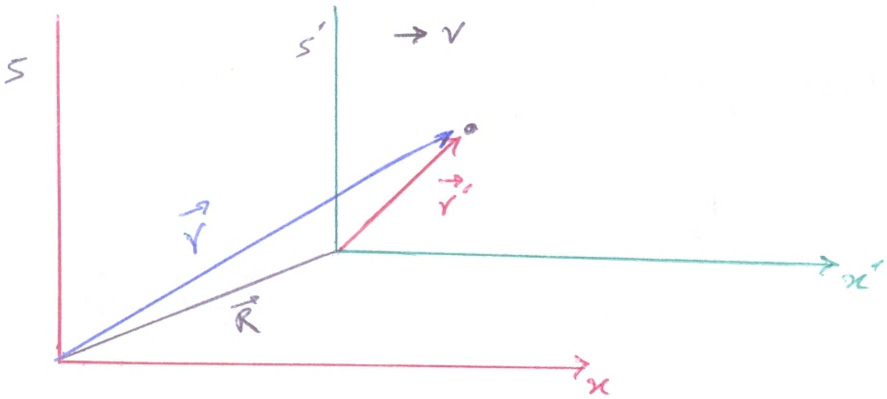
تمرین :

① شتاب را در مختصات کروی محاسبه کنید. (باید محاسبه کنید : $\frac{d}{dt}\hat e_r , \frac{d}{dt}\hat e_\theta , \frac{d}{dt}\hat e_\varphi$)

② سرعت در مختصات کروی را با استفاده از روش زیر بدست آورید

$$\vec r = r\hat e_r \Rightarrow \vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \dot r\,\hat e_r + r\frac{d}{dt}\hat e_r$$

سرعت و شتاب نسبی :



$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec R}{dt} + \frac{d\vec r'}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec v = \vec V + \vec v'} \rightarrow$$ سرعت نسبی

سرعت ذره نسبت به S = سرعت ذره نسبت به S' + سرعت S' نسبت به S

$$\frac{d\vec v}{dt} = \frac{d\vec V}{dt} + \frac{d\vec v'}{dt} \Rightarrow \vec a = a +$$

شتاب ذره نسبت به S = شتاب ذره نسبت به S' + شتاب S' نسبت به S

«نظریه دینامیکی»

آنچه که نظریاتی مثل نیوتون، مکانیک کوانتوم و هر نظریه دینامیکی دیگر یک مثال خاص از آن است، یک مفهوم عام تری است به نام نظریه دینامیکی

این نظریه چند رکن دارد که در زیر بیان می کنیم

1) دستگاه دینامیکی: برای بیان یک نظریه ابتدا باید مشخص کنیم دستگاه هایی که از آنها صحبت می شود چه موجوداتی هستند. وهنگامیکه می خواهیم یک دستگاه را توصیف کنیم ابتدا باید کمیت های دینامیک را بشناسیم

$f_1, \dots f_n$

2) پارامتر تحول: کمیتی است که تغییرات سایر کمیت های دستگاه نسبت به آن سنجیده شود در مکانیک این پارامتر زمان است البته توجه شود که می توان چند پارامتر تحول برای سیستم داشت

3) نظریه اندازه گیری (روش اندازه گیری): روش و تئوری که بر اساس آن کمیت ها را اندازه گیری می کنیم (برای آنکه بتوانیم به کمیتها و پارامتر تحول عدد نسبت دهیم باید تئوری اندازه گیری داشته باشیم)

$f_1(t), \dots, f_n(t)$

حرکت: تغییر کمیت های دینامیکی با پارامتر تحول را حرکت گوییم

به عنوان مثال اگر در ترمودینامیک، فشار با زمان تغییر کند می گوییم حرکت رخ داده

4) قوانین سازگار ریاضی: یک نظریه دینامیکی باید بر اساس قوانین سازگار ریاضی بیان شود تا بتواند حرکت دستگاه را توصیف کند

توجه: هدف نهایی در هر نظریه دینامیکی یافتن نحوه تغییرات کمیت های دینامیک برحسب پارامتر تحول است.

5) محیط: مجموعه عوامل فیزیکی که روی دستگاه اثر می گذارند. این عوامل می توانند توسط دسته ای از کمیت ها که به آنها کمیت های خارجی می گوییم بیان شوند

دینامیک کمیت های خارجی از قبل مفروض است و آنها را تعیین نمی کنیم

6) تئوری برهمکنش:

برهمکنش شامل نحوه اثر متغیرهای دینامیک روی یکدیگر و نیز متغیرهای خارجی روی متغیرهای دینامیک است

7 دستگاه آزاد: دستگاهی که برهمکنش ندارد.

در یک نظریه دینامیک ابتدا باید اصل حرکت دستگاه آزاد را داشته باشیم

مثال: تئوری نیوتون :

جلسه هفتم :

سوال : تا هنگامیکه یک سیستم آزاد است چه نوع حرکتی دارد؟

قانون اول نیوتون : دستگاه آزاد با سرعت ثابت حرکت می کند

$\dot{x}$ = ثابت

$\dot{y}$ = ثابت

$\dot{z}$ = ثابت

به هر دستگاهی که نسبت به دستگاه مطلق با سرعت ثابت حرکت کند دستگاه لخت گوییم

فرض مکانیک نیوتونی این است که دستگاه مطلقی وجود دارد که در آن قانون اول نیوتون برقرار است.

بنابراین یک دستگاه نسبت به ستاره های دوردست در نظر می گیریم و آن را مطلق می نامیم هر دستگاه دیگر که نسبت به آن با سرعت ثابت حرکت کند دستگاه لخت است.

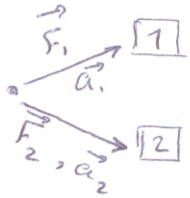
قانون دوم نیوتون :

هنگامیکه می خواهیم دینامیک را بیان کنیم باید بررسی کنیم چه موقع سیستم با محیط برهمکنش دارد.

ذره ی دارای برهمکنش با محیط شتابدار است

کمیتی که برهمکنش ذره با محیط را توصیف می کند نیرو نام دارد.

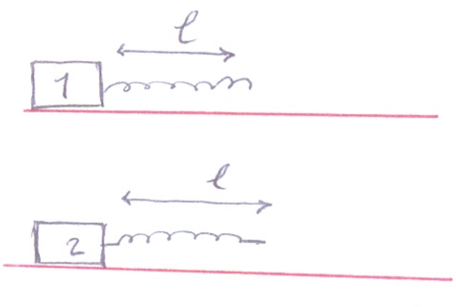
$\vec{F} \propto \vec{a}$



قانون دوم می گوید : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$

توجه شود که برهمکنش دو جسمی داریم یعنی مثلاً ذره و $\boxed{1}$ نیروی $\vec{F}_1$ و با $\boxed{2}$ ، $\vec{F}_2$ و نیرویی که برهمکنش ذره و $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ را بیان کند (برهمکنش سه جسمی) نداریم

مثال :



اجسام مختلف در شرایط یکسان پاسخ یکسانی به یک برهمکنش ندارند به عنوان مثال ۲ جسم 1 و 2 را به یک فنر با طول یکسان بسته ایم پاسخ ها متفاوت خواهد بود.

خاصیتی که موجب این تفاوت می شود را لختی می نامیم

$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$ ↳ آزمایش می گوید این نسبت همواره عددی ثابت است

یعنی برای کشش های مختلف با طول های متفاوت

این نسبت یکسان است

$\Rightarrow F = ma$

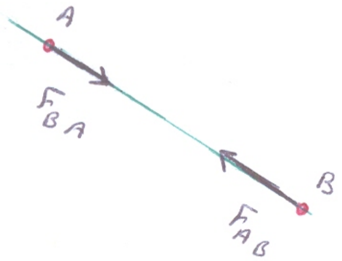
نیرو: شتاب جسم استاندارد (واحد جرم)

$$\frac{m}{\text{واحد جرم}} = \frac{F_{\text{عدد}} = \text{عدد شتاب جرم استاندارد}}{a}$$

$$\boxed{\sum F = ma}$$

قانون سوم: این قانون بیان می کند که برهمکنش یک به یک است، یعنی همواره برهمکنش بین اجسام است و مثلا بین یک جسم و موجودات موهومی نیست

$F_{AB} = -F_{BA}$ بیان ضعیف قانون سوم نیوتون



بیان قوی قانون سوم:

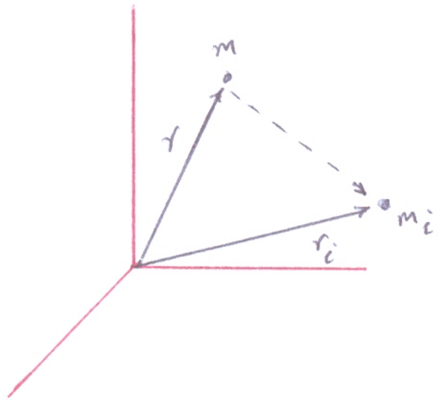
F_{BA} و F_{AB} برابر و مختلف العلامه هستند

و همچنین در راستای خط واصل بین دو جسم

می باشند

تذکر این نکته مهم است که در برهمکنش نیوتونی فرض بر آن است که دو جسم به صورت فوری و بدون هیچ وقفه از موقعیت همدیگر خبر دارند یعنی اگر به عنوان مثال جسم A را جابه جا کنیم جسم B بلا فاصله و بدون هیچ وقفه ای متوجه می شود که این فرض به معنای آن است که اطلاعات با سرعتی نامحدود (بیش از سرعت نور) منتشر می شوند

جلسه هشتم:

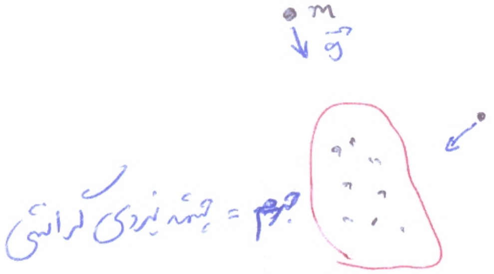


$$\vec{F} = -\sum_i G \frac{m\, m_i (\vec{r} - \vec{r_i})}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}$$

$$F = m\, g(r)$$

میدان گرانشی

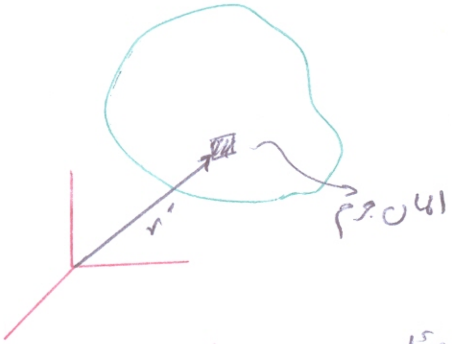
اگر چشمه نیروی گرانشی داشته باشیم



بنابراین به هر نقطه از فضا یک میدان گرانشی نسبت دادیم که اثر چشمه را در آن نقطه نشان می دهد

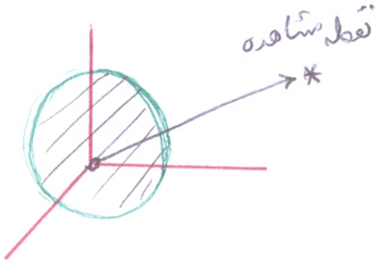
$$g(r) = -G \sum_i \frac{m_i (\vec{r} - \vec{r_i})}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}$$

توزیع جرم پیوسته:



$$dm = \rho(r')\, dV'$$

$$g(r) = -G \int \frac{\rho(r') (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}\, dV'$$



تذکر:

فرض کنید یک توزیع کروی جرم داریم؛ میدان گرانشی در خارج از کره همانند آن است که کل جرم در مرکز کره جمع شده باشد و ما میدان را محاسبه کرده باشیم

«اگر کره ای به جرم M داشته باشیم برای محاسبه میدان در یک نقطه خارج کره کافی است فرض کنیم تمام جرم کره در مرکز آن متمرکز شده»

$$g = -G \frac{M}{r^2} \hat{e}_r \quad \text{or} \quad \boxed{g = -GM\vec{r}/r^3}$$

تمرین: تذکری که در بالا گفته شد را ثابت کنید

میدان گرانش در نزدیکی سطح زمین :

$$\vec{g}_{\text{زمین}} = -\frac{GM}{R^2}\,\hat{e}_r$$

جهت این میدان به سمت مرکز زمین است

محاسبه شتاب گرانش

$\vec{F} = m\vec{a}$ قانون نیوتون

$\vec{F} = m\vec{g}$ قانون نیروی نیوتن

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}} \Rightarrow$$

شتاب هر جسم = میدان گرانشی

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g}(\vec{r})$$

توجه شود که رابطه بالا یک رابطه دیفرانسیلی است

برهمکنش های بنیادی :

تمام نیروهای طبیعت برگرفته شده از نیروهای بنیادی است که از برهمکنش بین ذرات بنیادی سازنده طبیعت بوجود می آید

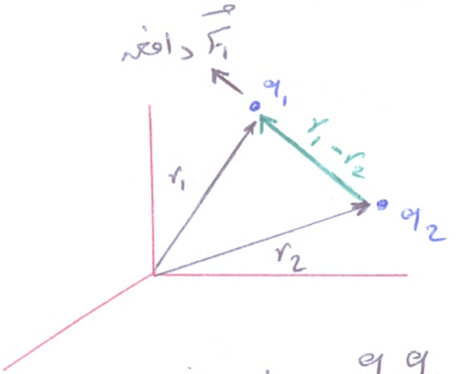
به عنوان مثال اصطکاک خود یک نیروی بنیادی نیست بلکه ناشی از نیروی بین مولکولها است

چهار نیروی بنیادی طبیعت

(1) گرانش (2) الکترومغناطیس (3) نیروی ضعیف (4) نیروی قوی

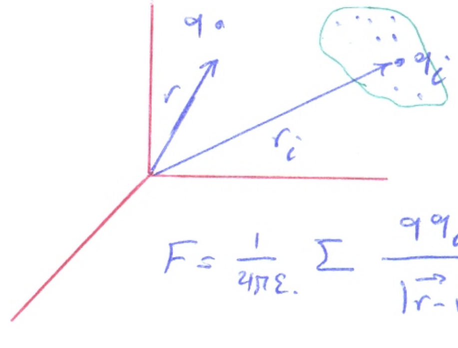
(1) گرانش را که در بالا توصیف کردیم

(2) برهمکنش الکترومغناطیس :



F_1

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

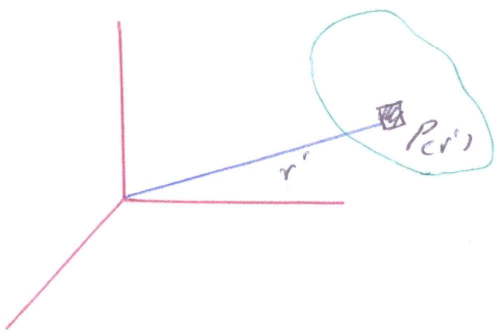


$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q q_i\,(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$$F = q\vec{E}(\vec{r})$$

میدان الکتریکی

توزیع پیوسته:



$$q_i \rightarrow \rho(r')\,dv'$$

$$\sum_i \rightarrow \int$$

$$r_i \rightarrow r'$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(r')\,(r-r')}{|r-r'|^3}\,dv'$$

قانون گاوس:

$$\oint E\cdot\hat{n}\,da = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

قانون گاوس برای گرانش:

GR		EM
$-G$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\oint \vec{g}\cdot\hat{n}\,dA = -4\pi G M$$

توجه: همان تکنیک‌هایی که برای حل مسئله در الکترومغناطیس به کار می‌رود در گرانش هم کاربرد دارد

در مسائل الکترومغناطیس همواره بارهای ساکن نداریم بلکه قسمت عمده‌ای از مسائل مربوط به بارهای متحرک و الکترودینامیک است

قانون نیرو برای بارهای متحرک

$$\vec{F} = q\,\underbrace{\vec{v}}_{\text{سرعت بار}} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{میدان مغناطیسی}} + q\,\underbrace{\vec{E}}_{\text{میدان الکتریکی}}$$

قوانین ماکسول:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 J + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

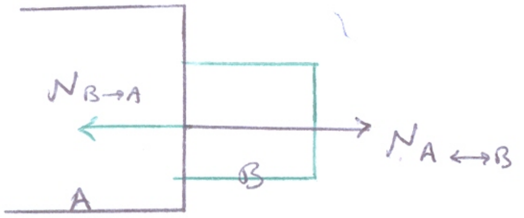
برهمکنش قوی:

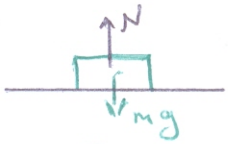
آن نیرویی که موجب می شود نیروی جاذبه الکتریکی بین الکترون ها و پروتونها درون هسته موجب فروپاشی هسته نشود نیروی قوی است یعنی این نیرو بسیار قوی تر از نیروی الکتریکی است و نمی گذارد الکترونها و پروتونها همدیگر را جذب کنند و اتم فرو بپاشد

نیروهای خاص:

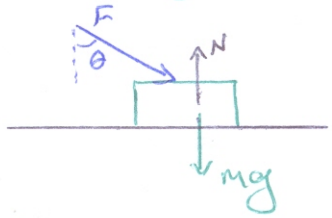
① نیروی عمودی سطح: هر دو جسم که با هم در تماس باشند به یکدیگر نیرویی در راستای عمود بر سطح تماس وارد می کنند. این نیروها طبق قانون سوم نیوتون مساوی و مختلف الجهت هستند

در مورد اندازه این نیرو اطلاعاتی نداریم اما اثر آن را بر حرکت به شکل یک قید می شناسیم (نیروهای قیدی) یعنی به عنوان مثال این نیرو اجازه نمی دهد جسم روی میز از میز عبور کند و در آن فرو برود   این نیرو را با N نشان می دهیم





$$N - mg = 0$$

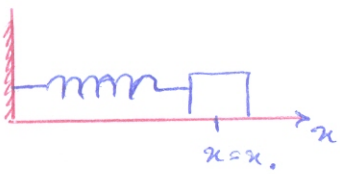


$$N - mg - F\cos\theta = 0$$

$$F \propto l - l_0$$

② نیروی فنر:

قانون نیرویی که برای فنر می نویسیم از مشاهده حاصل شده



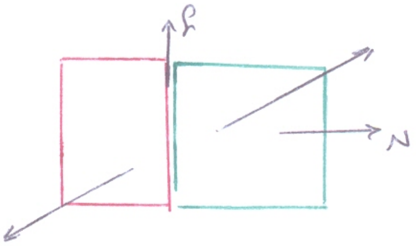
$$F = -kx\,\hat{e}_x$$

③ نیروی نخ

- این نیرو تنها در امتداد نخ است
- این نیرو به صورت کششی است و هل نمی دهد
- طول نخ تغییر نمی کند ، این نیرو قیدی است ، اثر آن را می دانیم (ثابت بودن طول نخ) ولی مقدارش را خیر

۴ نیروی اصطکاک :

برهمکنشی که بین دو سطح در حال تماس با هم رخ می دهد و اثر آن در امتداد موازی سطح است

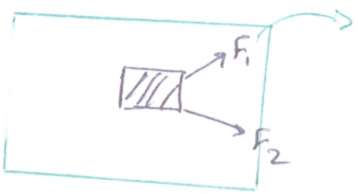


اگر دو جسم نسبت به هم حرکت کنند نیروی اصطکاک خلاف جهت حرکت نسبی است .

$|F_k| = \mu_k |N|$ اندازه نیروی اصطکاک حرکتی

سوال :
اگر دو جسم نسبت به هم حرکت نکنند جهت این نیرو چگونه است ؟

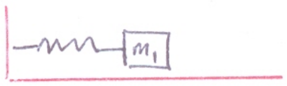
اصطکاک ایستایی : نیروی اصطکاک بین دو جسم نسبت به هم ساکن . این نیرو نیرویی است
در امتداد سطح است و در خلاف جهت برآیند نیروهای خارجی است F_s



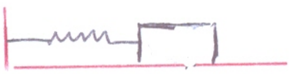
$$F_s \leq \mu_s N$$

جلسه ۹

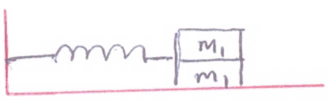
سوال : آیا جرم جمع پذیر است ؟



فرض کنید جرم m_1 به فنر k متصل باشد و نیز جرم m_2 هم به فنر k متصل باشد



می دانیم $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$ حال اگر دو جرم m_1 و m_2 را
با هم به فنر k متصل کنیم چه رخ می دهد ؟



آزمایش نشان می دهد شتاب نصف می شود

مقدار ماده :

در فیزیک کلاسیک می توانیم اندازه گیری مقدار ماده را با اندازه گیری جرم انجام دهیم
مثلاً یک گرم عدس ۲۰ عدد عدس دارد حال ۱ کیلوگرم عدس ۲۰۰۰۰ عدد عدس است

اما در فیزیک نوین این گونه محاسبه کردن صحیح نیست به عنوان مثال

در نسبیت دو جرم که با هم برخورد می کنند می توانند جرمی بیشتر و یا حتی کمتر از مجموع دو جرم اولیه خود داشته باشند

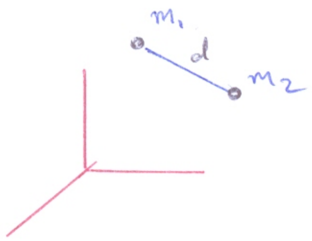
«در نسبیت مفهوم جرم با مفهوم مقدار ماده متفاوت است»

به عنوان مثال اگر یک هسته اورانیوم به دو هسته سبک تر بشکافد جرم مجموع دو هسته سبک تر کمتر از جرم هسته اورانیوم است.

قیود:

در حالت کلی برای سیستمی متشکل از N ذره $3N$ مختصه داریم

هنگامیکه دستگاهی از ذرات داریم در بسیاری از مواقع برخی از مختصات با هم مربوط هستند و لذا $3N$ مختصه نداریم بلکه تعداد مختصات سیستم کمتر است



مثال:

$m_1: \quad x_1 \quad y_1 \quad z_1$

$m_2: \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2$

اما توجه کنید که ۶ مختصه نداریم

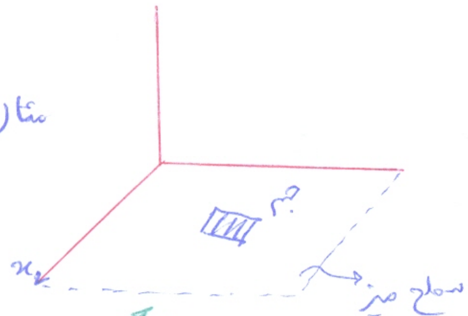
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

قید سیستم

$$\Rightarrow \underline{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-d^2=0}$$

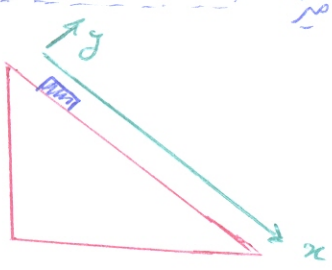
مثال: جسم روی میز و سطح شیب دار

مثال ①



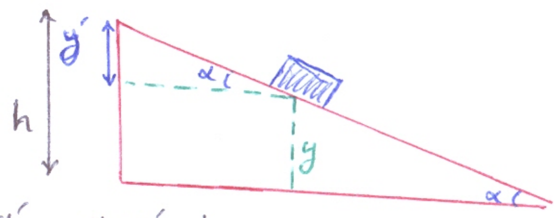
$\underline{z=0}$ قید مسئله

مثال ②



$\underline{y=0}$ قید

مثال ③



$x\, tg\alpha = y' \,, \quad y+y'=h \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y+(tg\alpha)x-h=0}$ قید مسئله

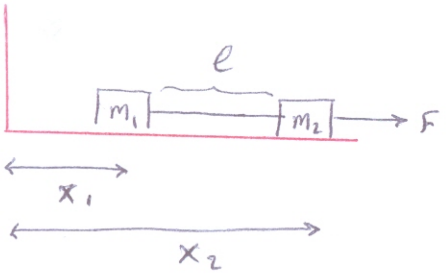
توجه شود که با انتخاب مختلف دستگاه مختصات برای یک مسئله قیود مختلف به مسئله اعمال می‌شود

$$\dot{y}+(tg\alpha)\,\dot{x}=0$$

$$\ddot{y}+(tg\alpha)\,\ddot{x}=0$$

با مشتق‌گیری از معادله قیودی به روابط بین سرعت‌ها و شتاب‌ها می‌رسیم

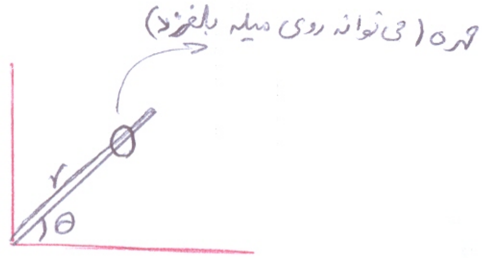
مثال



$x_2 - x_1 = l$ قید

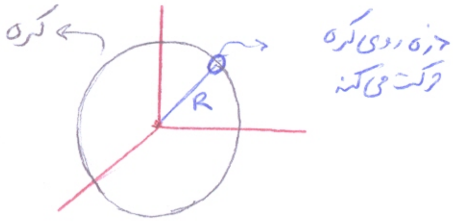
$v_2 - v_1 = 0$

$a_2 - a_1 = 0$



$\theta = \omega t + \theta_0$ قید

توجه شود که انتخاب مختصات قطبی برای این مسئله بسیار مناسب‌تر از انتخاب مختصات دکارتی است



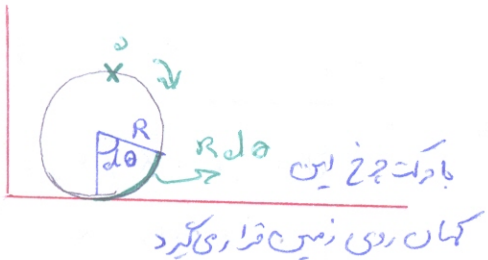
$x^2+y^2+z^2-R^2=0$ دکارتی

$r-R=0$ کروی

حرکت چرخ روی سطح

① حرکت انتقالی محور چرخ

② حرکت دورانی نقاط روی سطح چرخ



$$R\,d\theta = dx$$

$$R\frac{d\theta}{dt} = \dot{x}$$

$$dx = R\,d\theta \Rightarrow \underbrace{x = R(\theta-\theta_0)}_{\text{قید}}$$

دو نوع قید داریم:

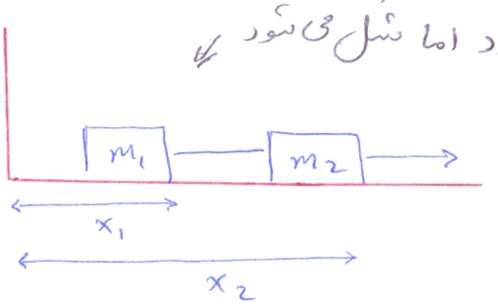
① قید هولونومیک: قیودی که در مثال‌های بالا ظاهر شد همگی هولونومیک بودند

② قیود غیرهولونومیک: یک نوع قید غیرهولونومیک آن است که رابطه بین سرعت و جابجایی را داشته باشیم اما نتوانیم انتگرال بگیریم. نوع دیگر آن است که به شکل نامساوی باشد

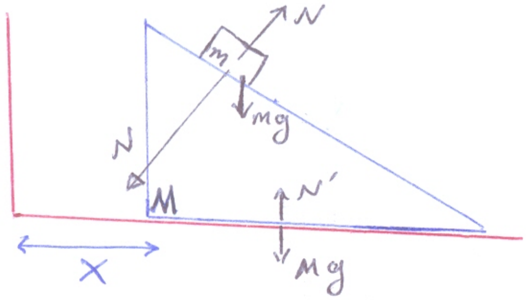
مثال: قطعه یخ روی کره: ←

$r \geq R$

یخ نمی تواند کشیده شود اما شُل می شود



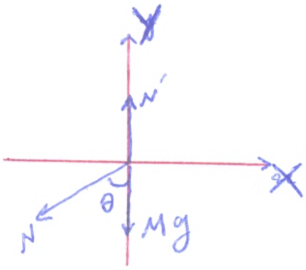
$x_2 - x_1 \leq l$



مثال: سیستم روبه رو را از حال سکون رها میکنیم حرکت سیستم را بررسی کنید

$X, Y \rightarrow$ مختصات جرم M

$x, y \rightarrow$ مختصات جرم m

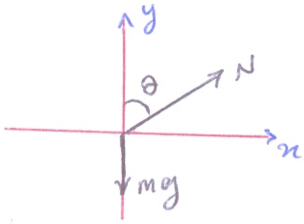


نمودار جسم M

$$N' - Mg - N\cos\theta = 0$$

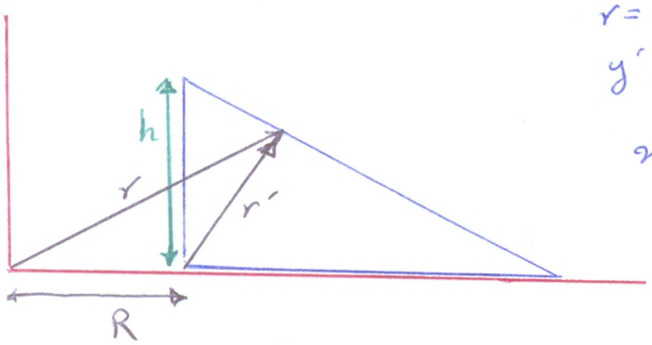
$$-N\sin\theta = M\ddot{X}$$

N, N' نیروهای قیدی هستند



نمودار جسم m

$$N\cos\theta - mg = m\ddot{y}$$



$$r = R + r'$$

$$y' = -x'\,tg\theta + h$$

$$x = x' + X$$

$$y = y' + 0$$

قید $y + (x - X)\,tg\theta - h = 0$

$$\ddot{y} + (\ddot{x} - \ddot{X})\,tg\theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N' - Mg - N\cos\theta = 0 \\ -N\sin\theta = M\ddot{X} \\ N\sin\theta = m\ddot{x} \\ N\cos\theta - mg = m\ddot{y} \\ \ddot{y} + tg\theta\,(\ddot{x} - \ddot{X}) = 0 \end{cases}$$

دستگاه 5 معادله 5 مجهول حل می کنیم

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = 0 \Rightarrow \ddot{X} = -\frac{m}{M}\ddot{x}$$

$$\ddot{y} + tg\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -tg\theta\left(\ddot{x} + \frac{m}{M}\ddot{x}\right)$$

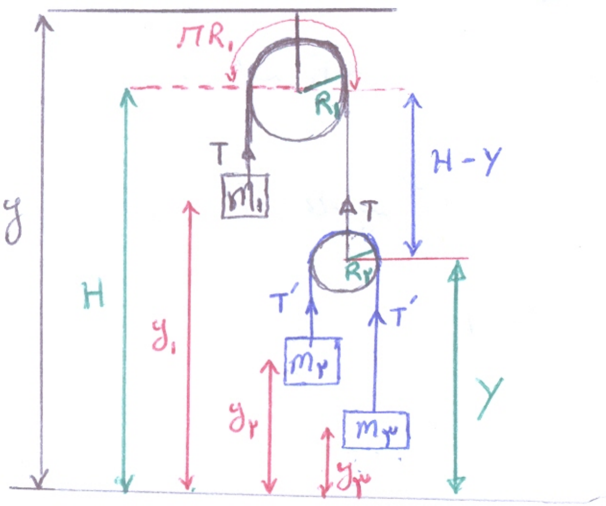
$$\begin{cases} N\sin\theta = m\ddot{x} \\ N\cos\theta - mg = -M\,tg\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)\ddot{x} \end{cases}$$

$$mg\sin\theta = m(\cos\theta)\ddot{x} + m(tg\theta)\sin\theta\left(1 + \frac{m}{M}\right)\ddot{x}$$

$$g\sin\theta = \ddot{x}\left[\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{g\sin\theta\cos\theta}{1 + (m/M)\sin^2\theta} \\ N = mg\cos\theta / 1 + \left(\frac{m}{M}\right)\sin^2\theta \end{cases}}$$

مثال: جرم نخ و قرقره ها را ناچیز فرض کنید



$$\begin{cases} T-2T'=0 \\ T-m_1g=m_1\ddot{y}_1 \\ T'-m_2g=m_2\ddot{y}_2 \\ T'-m_3g=m_3\ddot{y}_3 \end{cases}$$

نیروهای قیدی

$$H-y_1-\pi R_1+H-Y=\ell_1 \qquad \begin{cases} -\ddot{y}_1-\ddot{Y}=0 \\ 2\ddot{Y}-\ddot{y}_2-\ddot{y}_3=0 \end{cases}$$

$$Y-y_2+\pi R_2+Y-y_3=\ell_2$$

$$\ddot{y}_1=-\frac{1}{2}(\ddot{y}_2+\ddot{y}_3)$$

$$2T'-m_1g=-\frac{1}{2}m_1(\ddot{y}_2+\ddot{y}_3)$$

$$2T'-(m_2+m_3)g=m_2\ddot{y}_2+m_3\ddot{y}_3$$

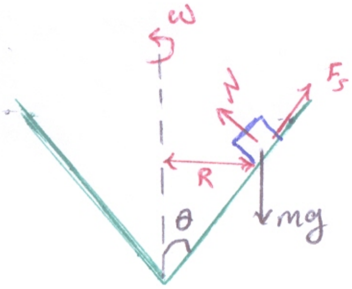
$$\begin{cases} (m_1-m_2-m_3)g=\frac{1}{2}(\ddot{y}_2+\ddot{y}_3)+m_2\ddot{y}_2+m_3\ddot{y}_3 \\ (m_1-m_3)g=-m_2\ddot{y}_2+m_3\ddot{y}_3 \end{cases}$$

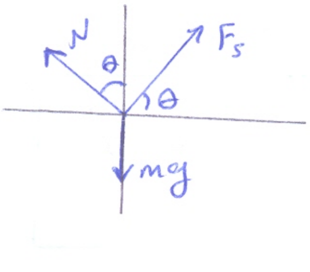
$$\Rightarrow \ddot{y}_2=\frac{m_3}{m_2}\ddot{y}_3+\left(\frac{m_3-m_2}{m_2}\right)g$$

$$(m_1-m_2-m_3)g=\frac{1}{2}m_1\left[\ddot{y}_3+\frac{m_3}{m_2}\ddot{y}_3+\left(\frac{m_3}{m_2}-1\right)g\right]+$$

$$+m_3\ddot{y}_3+(m_3-m_2)g+m_3\ddot{y}_3 \quad \ldots$$

مثال: جسمی به جرم m روی دیواره قیفی قرار دارد که با سرعت زاویه ای ω حرکت می کند (می خواهیم جسم نسبت به قیف حرکت نکند و سطح اصطکاک دارد)





توجه شود که جهت F_s را نمی دانیم یک جهت را به طور اتفاقی اختیار می کنیم ↙ یا ↗ که ما ↗ را انتخاب کردیم

$$\left.\begin{aligned} N\cos\theta+F_s\sin\theta-mg&=0 \\ N\sin\theta-F_s\cos\theta&=mR\omega^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{نیروهای قیدی}$$

$$N(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+0=mg\cos\theta+mR\omega^2\sin\theta$$

$$N=mg\cos\theta+mR\omega^2\sin\theta$$

$$0 + F_s(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = mg\sin\theta - mR\omega^2\cos\theta$$

$$\boxed{F_s = m(g\sin\theta - R\omega^2\cos\theta)}$$ → اگر ω بزرگ باشد F_s منفی می‌شود پس باید جهت آن را روی شکل تغییر دهیم

حال که F_s را محاسبه کردیم شرط $F_s \le \mu_s N$ را بررسی می‌کنیم

$$m(g\sin\theta - R\omega^2\cos\theta) \le \mu_s m(g\cos\theta + R\omega^2\sin\theta)$$

$$R\omega^2(\mu_s\sin\theta + \cos\theta) \ge g(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$$

$$\omega^2 \ge \frac{g}{R}\,\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\mu_s\sin\theta + \cos\theta} \qquad \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\mu_s\sin\theta + \cos\theta}}$$

اگر این عبارت منفی شود زیر رادیکال منفی می‌شود بنابراین باید قرار دهیم $\omega_{min} = 0$ یعنی ما هر چه قدر هم آرام بچرخیم جرم ساکن می‌ماند و پایین نمی‌آید

$tg\theta > \mu_s$

$\omega_{min} = 0 \qquad tg\theta \le \mu_s$

اگر $\omega^2 > \frac{g}{R} tg\theta$ باشد

باید جهت F_s را روی شکل تغییر دهیم $\Leftarrow$

$$F_s \longrightarrow -F_s$$

$$F_s = m(R\omega^2\cos\theta - g\sin\theta)$$

$$m(R\omega^2\cos\theta - g\sin\theta) \le \mu_s m(g\cos\theta + R\omega^2\cos\theta)$$

$$\omega^2 R(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) \le g(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)$$

$$\omega^2 \le \frac{g}{R}\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$

$$\boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}}$$

برای آنکه زیر رادیکال منفی نشود باید داشته باشیم $\cos\theta > \mu_s\sin\theta \Leftarrow \mu_s < \cot g\theta$

بنابراین اگر $\mu_s < \cot g\theta$ باشد ω_{max} خواهیم داشت در غیر این صورت ω_{max} نداریم یعنی حد بالا روی ω نداریم و با هر سرعت بالایی بچرخیم جسم به سمت بالا حرکت نمی‌کند