باسمه تعالی

دانشجویان و مراجعه کنندگان عزیز به این صفحه

متنی که در پیش دارید نسخه اولیه‌ای از درسنامه مکانیک تحلیلی ۱ است و ممکن است حاوی اشکالات ~~تایپی~~ متنی و ویرایشی باشد. پیشاپیش از نکته سنجی شما در ارائه اشکالات متن به اینجانب تشکر می کنم. امیدوارم در آینده نزدیک نسخه تایپی و ویراسته‌ی این متن آماده شود.

احمد شیرزاد

۲۰/۴/۹۲

فصل اول - فضاهای برداری

۱- مقدمه: این فصل که بیشتر حالتی ریاضی دارد. هدف ما بررسی ساختار ریاضی فضاهای برداری از دیدگاهی تجریدی است. منظور از اصطلاح "تجریدی" آن است که تاکید ما روی خواص عمومی ریاضی یک ساختار است و نه تکیه بر ویژگیهای یک مثال مخصوص. هر دانشجو به تدریج با رشد فکری و کسب مهارتهای ریاضی یاد می گیرد که از مصادیق خاص به سمت مفاهیم تجریدی حرکت کند و به مرور بتواند گزاره های جهان‌شمول‌تری از قضایای خاص ریاضی درک کند. در ضمن این درس مثال هایی از این گزاره را توضیح خواهیم داد. اما یک مثال آشنا برای همه ما با مروری از خاطرات کودکی حاصل می شود. در دبستان برای آنکه مفهوم جمع را به ما یاد دهند می گفتند ۳ مداد و ۲ مداد می گردد ۵ مداد. اما بیشتر که رفتیم یاد گرفتیم که ۲+۳ می شود ۵، بدون آنکه بپرسیم ۳ مداد یا ۳ کتاب. این یعنی فهم و درک مفهوم تجریدی عدد بدون اتلاق یک محدود خاص به آن.

۲- ساختارهای جبری

در این بخش فرض می کنیم خواننده با مفاهیم عمومی نظریه مجموعه ها و اعمال اولیه (نظیر اجتماع و اشتراک) آشناست و می تواند مجموعه هایی با تعداد اعضای محدود و یا مجموعه هایی با تعداد نامتناهی را بازشناسد. مجموعه های با تعداد نامتناهی ممکن است شمارش پذیر باشند و یا دو عضو

آنها با یک یا چند عدد تعیین می‌شود و یا ممکن است شمارش ناپذیر باشد و با یک یا چند پارامتر پیوسته تعیین می‌شوند. بررسی خواص ساختارهای ریاضی موضوع بحث جبر در رشته ریاضی است.

مهمترین ساختارهای ریاضی عبارتند از: گروه، میدان، فضای برداری، حلقه، جبر و... تکیه ما در این فصل ساختار فضای برداری است، اما به علت استفاده‌های بعدی اشاره‌ای نیز به ساختارهای دیگر خواهیم داشت

۲-۱- گروه

مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی مانند G گروه است، اگر در این مجموعه یک عمل، که از این پس آن را ضرب می‌نامیم، بین اعضای آن تعریف شده باشد که دارای خواص زیر است

الف- بسته بودن: اگر $a,b\in G$ آنگاه $ab\in G$

که منظور از ab حاصلضرب a در b است

ب- وجود عضو خنثی: در مجموعه G عضو e وجود دارد به طوری که

$$ae=ea=a$$

ج- وجود عضو معکوس: به ازای هر $a\in G$ وجود دارد $a^{-1}\in G$ به طوری که

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e$$

د- شرکت پذیری: به ازای $a,b,c\in G$ داریم

$$(ab)c=a(bc)$$

مثال ۱- یک آینه نامتناهی منطبق بر صفحه $z=0$، در نظر بگیرید.

به ازای هر بردار $A=(A_x,A_y,A_z)$ می‌توان بردار $RA\equiv\bar{A}\equiv(A_x,A_y,-A_z)$ را معرفی کرد که تصویر آن در آینه مذکور است. همچنین عملگر واحد، 1 به طور طبیعی هر بردار را به خودش می‌نگارد. مجموعه $\{1, R\}$ یک گروه

دو عضوی است. جدول ضرب اعضای این گروه به صورت زیر است

	1	R
1	1	R
R	R	1

از این جدول خواص بسته بودن و وجود عضو خنثی آشکار است. معکوس 1 مثل هر گروه دیگری خودش است و معکوس R نیز خودش است، چون $RR = 1$
خاصیت شرکت پذیری نیز به وضوح قابل تحقیق است

مثال ۲- دو شیء شماره ۱ و ۲ را در نظر بگیرید و دو جعبه ذهنی که این دو شیء را در آن جای می‌دهند. مثلاً می‌توانید دو گوی سفید و سیاه و دو جعبه واقعی برای آنها تصور کنید. (دقت کنید گزارهٔ اول مفهومی تجریدی است که در آن اشیاء ۱ و ۲ هر چیزی می‌توانند باشند و گزارهٔ دوم یک مثال مصداقی است.) عملگر واحد ترتیب ۱ و ۲ را عوض نمی‌کند و عملگر S_{12} جای آنها را عوض می‌کند. به طور شماتیک

$$e \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad S_{12} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

مجموعه $\{e, S_{12}\}$ یک گروه دو عضوی است که جدول ضرب آن درست مشابه به گروه مثال ۱ است.

توجه داشته باشید که گروه‌های مثال‌های ۱ و ۲ کاملاً مشابه به یکدیگرند و ساختارهای جبری یکسانی دارند. به این گروه، C_2 گفته می‌شود. هر گزاره‌ای در مورد خواص مثال ۱ قابل تعمیم به مثال ۲ نیز هست با اینکه مفهوم و معنای آنها تفاوت دارد. این همان نقشی است که تجرید ریاضی برای ما انجام می‌دهد. یعنی مصداق را کنار بگذاریم و روی خواص عام ریاضی بررسی انجام دهیم.

مثال ۳- حال سه شیئ متمایز ۱، ۲، ۳ و سه جعبه ذهنی فرض کنید و مجموعه اعمالی که ترتیب این سه شیئ در جعبه ها را عوض می کند در نظر بگیرید. به طور شماتیک

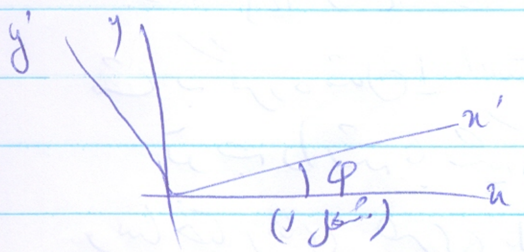
$$e \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad S_{12} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad S_{13} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{23} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad S_{123} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_{321} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

این گروه با S_3 نمایش داده می شود و گروه جایگشت ۳ عضو است. به همین ترتیب می توان گروه جایگشت N عضو یعنی S_N را نشان داد که دارای $N!$ عضو است.

تمرین: جدول ضرب گروه S_3 (جدول حاصلضرب های دو به دوی اعضا) را به دست آورید و از روی آن معکوس هر عضو را مشخص کنید.

تعریف: گروه G را آبلی گوییم اگر به ازای هر دو عضو دلخواه $a,b\in G$ داشته باشیم $ab=ba$. در مثال های ۱ و ۲ گروه آبلی و در مثال ۳ غیر آبلی است.



(شکل ۱)

مثال ۴- مجموعه دورانهای حول محور z را در نظر بگیرید. فرض کنید $R(\varphi)$ محورهای x و y را در جهت مثلثاتی به اندازه φ می چرخاند.

در اینجا اعضای گروه با پارامتر پیوسته φ در بازه $[0,2\pi]$ برچسب می خورند. بنابراین این گروه نامتناهی است و چون پارامتر آن پیوسته است به آن یک گروه پیوسته نیز می گویند. به راحتی می توان دید که حاصل ضرب دو عضو دلخواه گروه به صورت زیر است

$$R(\varphi_1)\,R(\varphi_2) = R(\varphi_1+\varphi_2) \qquad (1)$$

که اگر $\varphi_1+\varphi_2$ از 2π زاویه بیشتر شد، 2π از آن کم می کنیم. رابطه (۱) در واقع نقش جدول ضرب اعضای گروه را ایفا می کند. گروه فوق آبلی

است و بعدها خواهیم دید که آن را گروه $SO(2)$ می‌نامند.

مثال ۵ – مجموعهٔ اعداد حقیقی نسبت به عمل جمع، یک گروه است. توجه کنید که مفهوم تجریدی عمل ضرب گروه در این جا در عمل جمع دو عدد حقیقی مصداق یافته است. چون جمع هر دو عدد یک عدد است، خاصیت بسته بودن واضح است. عدد صفر عنصر خنثای عمل جمع است و معکوس عدد α تحت عمل جمع را $-\alpha$ می‌نامیم $(\alpha^{-1} \equiv -\alpha)$. خاصیت شرکت پذیری نیز واضح است. حال عمل تفریق را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha - \beta \equiv \alpha + (-\beta) = \alpha \beta^{-1}$$

در قسمت سوم عمل + با ضرب گروه (که از هم ترتیش بدون هیچ علامتی) و $-\beta$ با β^{-1} جایگزین شده‌اند.

مثال ۶ – مجموعهٔ اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۷:

$$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

با عمل ضرب به صورت

$$\alpha\beta = \alpha + \beta \mod 7$$

یعنی جمع هر دو عدد که بیشتر از ۷ شد، ۷ تایش را برداریم. خواننده به راحتی می‌تواند تحقیق کند که این مجموعه با عمل فوق یک گروه متناهی است. تساوی‌های از قبیل $(4)(5) = 2$ و $4^{-1} = 3$ جالب‌اند!

۲-۲- میدان – دومین ساختاری که در جبر اهمیت دارد، میدان یا فیلد است.

تعریف – مجموعهٔ F با دو عمل که به طور نمادین آن‌ها را جمع (+) و ضرب

می نامیم میدان است اگر خواص زیر برقرار باشد

الف - مجموعهٔ F نسبت به عمل جمع گروه آبلی باشد،

ب - مجموعهٔ $F-\{0\}$، که در آن 0 (صفر) عضو خنثای عمل جمع است،

تحت عمل ضرب گروه آبلی باشد

ج - عمل ضرب در جمع توزیع پذیر شود یعنی

$$a(b+c) = ab+ac$$

معکوس عمل توزیع ضرب در جمع همان فاکتورگیری است.

مثال ۱- اعداد حقیقی - خواص فوق در مورد مجموعهٔ اعداد حقیقی بدیهی است. در واقع ساختار میدان یک تعمیم تجریدی از خواص مجموعهٔ اعداد حقیقی است. به بیان دیگر اگر از خود بپرسیم "آیا هیچ مجموعهٔ دیگری وجود ندارد که در آن مثل اعداد حقیقی بتوان چهار عمل اصلی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) انجام داد، پاسخ آن است که هر مجموعه‌ای با این خواص یک میدان است.

تمرین - بررسی کنید آیا مجموعهٔ عددهای صحیح و مجموعهٔ عددهای گویا ساختار میدان دارند یا نه؟ و چرا؟

مثال ۲- اعداد مختلط - مجموعهٔ جفت‌های مرتب از اعداد حقیقی به صورت $c=(a,b)$ را در نظر بگیرید. اعمال جمع و ضرب اعضای $c_1=(a_1,b_1)$ و $c_2=(a_2,b_2)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$c_1+c_2 = (a_1+a_2 \,,\, b_1+b_2)$$

$$c_1c_2 = (a_1a_2-b_1b_2 \,,\, a_1b_2+a_2b_1)$$

تحقیق اینکه مجموعه فوق تحت عمل جمع گروه آبلی است ساده است.

عدد $c=(a,b)$

عضو خنثای عمل جمع $0=(0,0)$ و عضو معکوس $-c=(-a,-b)$

است. همچنین از تعریف می‌توان دید که عدد مختلط $(1,0)$ عضو خنثای عمل

ضرب است و معکوس (a,b) نیز عدد مختلط $c^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

است. تحقیق خاصیت شرکت‌پذیری ضرب کمی محاسبه جبری نیاز دارد.

و خاصیت توزیع‌پذیری ضرب در جمع

تمرین: نشان دهید مجموعهٔ اعداد مختلط با اعمال جمع و ضرب به صورت فوق

یک میدان است.

یک عدد مختلط جالب وجود دارد که عبارت است از $i=(0,1)$. داریم

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-(1,0)$$

برای پرهیز از نوشتن دوتایی‌ها می‌توانیم $(1,0)$ را عدد 1 و $(0,1)$ را

عدد i بنامیم (عددی که مربع آن -1 می‌شود) به این ترتیب هر عدد

مختلط دلخواه را می‌شود به صورت

$$c=(a,b)=a+ib$$

نیز نوشت. جمع و ضرب اعداد مختلط درست مشابه اعداد حقیقی خواهد

بود، فقط همه جا ضرب i در خودش را -1 می‌گیریم. به a جزء حقیقی

و به b جزء موهومی عدد مختلط c گفته می‌شود. این فقط یک اسم‌گذاری

است وگرنه جزء حقیقی هیچ تشرفی بر جزء موهومی ندارد و موهومی

بودن نیز به معنای خیالی بودن نیست!

ساختار اعداد مختلط به ما توانایی‌های بیش از اعداد حقیقی می‌دهد.

به عنوان مثال هیچ عدد حقیقی را نمی‌توان یافت که در معادله $x^2=-2$

صدق کند در صورتی که عدد مختلط $\frac{i}{\sqrt{2}}$ این معادله را برآورده می‌کند.

تمرین - نشان دهید هر معادله درجه ۲ در چارچوب اعداد مختلط همیشه یک یا دو جواب دارد، صرف نظر از آن که علامت $\Delta = b^2 - 4ac$ چه باشد.

۲-۳- فضای برداری - ساختار فضای برداری یک گام پیچیده‌تر از ساختارهای قبلی است. فضاهای برداری با انواع و اقسام آنها از ابزارهای اصلی درک مفاهیم فیزیکی هستند و بسیار اهمیت دارد که درکی تجریدی و عاری از ویژگی‌های یک مصداق خاص از آنها داشته باشیم. تأکید می‌کنیم که از بردارها تصور یک پاره خط که در یک سمت آن علامت پیکان قرار داده شده نداشته باشید. این فقط یک مثال از مفهوم فضای برداری است (هر چند مثال مهمی است).

هر فضای برداری روی یک هیأت خاص بنا می‌شود که اعضای آن را در اینجا به اختصار "عدد" می‌گوییم. در این درس به هیأت اعداد حقیقی بسنده می‌کنیم. در این حالت فضای برداری را حقیقی می‌نامیم. اگر از هیأت اعداد مختلط استفاده می‌کردیم، فضای برداری را مختلط می‌گفتیم.

تعریف - مجموعهٔ V روی هیأت F یک فضای برداری است اگر روی آن عمل جمع اعضای V و ضرب اعضای F در V با خواص زیر وجود داشته باشد.

الف - مجموعهٔ V نسبت به عمل جمع بردارها گروه آبلی باشد.

ب - حاصل ضرب یک عدد در یک بردار، یک بردار باشد، یعنی

$$\alpha \in F \ , \ v \in V \Rightarrow \alpha v \in V$$

ج- ضرب عدد در جمع بردارها توزیع شود

$$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$$

د- ضرب بردار در جمع دو عدد توزیع شود

$$(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$$

عضو خنثای جمع برداری، بردار صفر، 0 نام دارد و عضو معکوس بردار u تحت عمل جمع ترید $-u$ نام دارد.

مثال ۱- مجموعهٔ n تایی های مرتب ستونی (یا سطری) از اعداد حقیقی با قاعدهٔ جمع و ضرب در عدد به صورت زیر

$$u=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\Rightarrow u+v=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}\quad\text{و}\quad \alpha u=\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha\alpha_n\end{pmatrix}$$

بردار صفر $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ و معکوس جمعی u، بردار $-u=\begin{pmatrix}-\alpha_1\\ \vdots\\ -\alpha_n\end{pmatrix}$ است.

مثال ۲- مجموعهٔ توابع پیوسته از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی ~~با قاعدهٔ جمع~~ با قاعدهٔ جمع و ضرب در عدد به صورت زیر

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\Rightarrow x\rightarrow f(x)$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

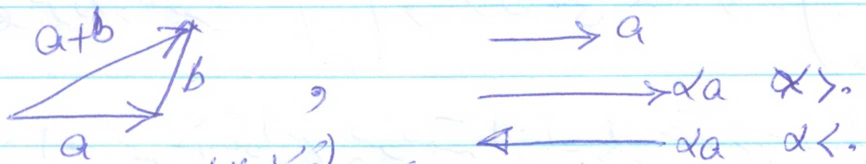
توجه کنید که مفهوم تابع به عنوان یک نگاشت را با مقدار تابع در یک نقطه معین اشتباه نگیرید، یک نگاشت به عنوان عملی که روی تمام گسترهٔ دامنهٔ خود تعریف شده معنی دار است.

تمرین- فضای برداری بودن مجموعهٔ توابع فوق را نشان دهید.

در اینجا خواننده‌ای را که کم‌تر با مفاهیم تجریدی ریاضی سر و کار داشته است به دقت بیشتری در مفهوم فضای برداری دعوت می‌کنیم. توجه داشته باشید که تصور شما از بردار همیشه به شکل پاره خطی که در انتهای آن یک پیکان رسم شده است نباشد. این تصور فقط برای مثال بردارهایی که در فضای دو بعدی یا سه بعدی تعریف شده‌اند صادق است. مفهوم فضای برداری آن خصوصیات عام و مشترکی است که برای پاره خط‌های جهت‌دار (در دو یا سه بعد)، توابع حقیقی از اعداد حقیقی و مثلاً ۵ تایی‌های مرتب یکسان است.

تمرین: ثابت کنید مجموعه توابعی که انتگرال مجذور آنها روی محور حقیقی متناهی است یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. ضرب در عدد و جمع توابع شبیه حالت کلی است.

مثال ۳- مجموعهٔ پاره خط‌های جهت‌دار در دو یا سه بعد که جمع آنها و ضرب کردن آنها در عدد با قاعدهٔ هندسی مطابق شکل‌های زیر داده می‌شود



(شکل ۲)

تمرین: درستی خواص فضای برداری برای این مجموعه را تحقیق کنید

بعدها ما برای بردارها در فضای سه بعدی خواص دیگری را نیز ذکر خواهیم کرد که مربوط است به رفتار آنها تحت دوران محورهای مختصات. در آنجا نیز می‌توان دید که مجموعه سه تایی‌های حقیقی به شکل (A_1, A_2, A_3) که تحت دوران خواص معینی دارند یک فضای برداری است.

ذکر این نکته بدیهی به نظر می‌رسد که فقط بردارهای یک مجموعهٔ معین را می‌توان باهم جمع کرد. مثلاً جمع کردن تابع $f(x)$ با بردار (a_1, a_2) معنایی ندارد هرچند هردو بردار هستند.

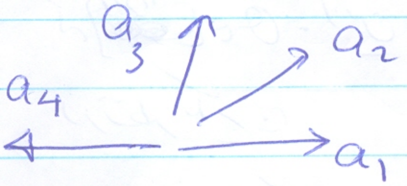
تعریف ـ زیرفضا ـ اگر $V_1 \subset V$ به طوری که هر ترکیب خطی از بردارهای V_1 داخل V_1 باشد گوییم V_1 زیرفضای V است. مثلاً کلیه بردارهایی که در صفحه xy قرار دارند (مؤلفه z ندارند) بر اثر جمع شدن یا ضرب در عدد در همین صفحه می‌مانند. فضای این بردارها زیرفضایی از بردارهای سه مؤلفه‌ای است (که مؤلفه z آنها هر چیزی می‌تواند باشد).

تعریف ـ استقلال خطی ـ مجموعه بردارهای a_1 تا a_n در فضای V را مستقل خطی گویند اگر

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$$

معنای گزاره فوق آن است که تنها ترکیب خطی از a_1 تا a_n که منتج به صفر است، ترکیب خطی بدیهی با ضرایب صفر است. ~~[illegible]~~ در مقابل، مجموعه بردارهای a_1 تا a_n وابسته خطی هستند اگر ~~[illegible]~~ حداقل یک ترکیب خطی غیربدیهی (یعنی ترکیبی که همهٔ ضرایب صفر نباشند) از آنها صفر شود.

مثلاً در مجموعهٔ بردارهای زیر از فضای دوبعدی



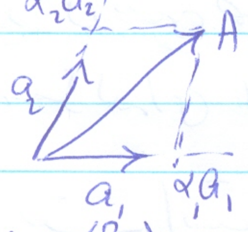
(شکل ۲)

مجموعه‌های $\{a_1\}$، $\{a_2\}$، $\{a_1, a_2\}$، $\{a_1, a_3\}$ و $\{a_2, a_3\}$ مستقل خطی‌اند، اما مجموعه‌های $\{a_1, a_2, a_3\}$ و $\{a_1, a_2, \}$ وابسته خطی‌اند.

تعریف ـ بردارهای کامل ـ مجموعه بردارهای a_1 تا a_n (در فضای برداری V) را کامل گوییم اگر هر برداری از V را بشود به صورت ترکیب خطی از آنها نوشت:

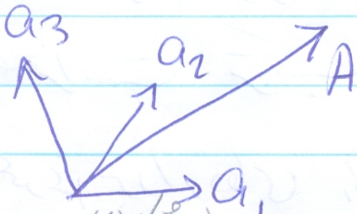
$$A \in V \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

مثلاً در شکل (۴) مجموعه بردارهای $\{a_1, a_2\}$ ، $\{a_2, a_3\}$ و $\{a_1, a_2, a_3\}$ در دو بعد کامل هستند و مجموعه های $\{a_1\}$ و $\{a_1, a_4\}$ کامل نیستند. فرض کنید می خواهیم ضرایب بسط بردار دلخواه A را بر حسب بردارهای a_1 و a_2 در شکل زیر بیابیم. برای این کار از انتهای A به موازات a_1 و a_2 رسم می کنیم و نسبت بردارهای حاصل در هر یک از دو امتداد به a_1 و a_2 را می سنجیم. در این حالت ضرایب α_1 و α_2 دو عدد یکتا هستند. اما اگر بخواهیم بسط بردار $\vec{A}$



(شکل ۴)

را بر حسب a_1 ، a_2 و a_3 در شکل ۵ بیابیم، بیشمار ضریب α_1 ، α_2 و α_3 برای این کار می توان یافت. توصیه می شود خواننده چند مورد را خودش تحقیق کند. به طور کلی اگر سه بردار وجود داشته باشند که هم امتداد نباشند، در دو بعد به یکدیگر وابسته خطی اند. همین طور چهار بردار در سه بعد و امثال آن.



(شکل ۵)

مثال - سینوس ها و کسینوس های کامل - مجموعه توابع $\psi(\theta)$ را در نظر بگیرید که $\theta \in [-\pi, \pi]$. این مجموعه یک فضای برداری است. حال مجموعه توابع زیر را در نظر بگیرید

$$f_n(\theta) = \sin n\theta \quad , \quad g_n(\theta) = \cos n\theta$$

این مجموعه که اعضای آن با اعداد صحیح و مثبت n مرتب شده اند، یک مجموعه کامل هستند. یعنی برای $\psi(\theta)$ دلخواه می توان نوشت

$$\psi(\theta) = \sum_n \left[\alpha_n f_n(\theta) + \beta_n g_n(\theta)\right]$$

مجموعه $f_n(\theta)$ ها به تنهایی برای زیرفضای V^o متشکل از توابع فرد و مجموعه $g_n(\theta)$ ها به تنهایی برای زیرفضای V^e متشکل از توابع زوج در بازه فوق کامل هستند. اثبات کامل بودن توابع فوق موضوع قضیه فوریه است که از حوصله بحث ما خارج است.

در مثال های مرتبط با شکل ۳ دیدیم که ممکن است یک دسته بردار مستقل خطی باشند اما کامل نباشند، یا کامل باشند و مستقل خطی نباشند. اما علاقه ما به دسته برداری است که هر دو ویژگی را داشته باشد.

تعریف ـ پایه ـ دسته بردار a_1 تا a_n در فضای برداری V را یک پایه گوییم اگر مستقل خطی و کامل باشند.

در مثال های شکل ۲ مجموعه های $\{a_1, a_2\}$ و $\{a_2, a_3\}$ پایه اند. در فضای برداری دو بعدی مثال ۲ (بخش فضاهای برداری) هر دو بردار غیر هم‌راستا یک پایه اند و در فضای سه بعدی هر سه بردار که در یک صفحه نباشند یک پایه اند.

برای یک فضای برداری دلخواه بیشمار پایه می‌توان معرفی کرد. اگر تعداد بردارهای پایه متناهی باشد، فضای برداری را فضای "محدود بعد" می نامند. برای هر فضای "محدود بعد" تعداد بردارهای پایه عددی ثابت است (به انتخاب پایه بستگی ندارد) که به آن بعد فضا می گویند. فضاهایی که تعداد بردارهای پایه آنها نامتناهی است فضاهای نامحدود بعد نام دارند. بردارهای پایه فضای نامحدود بعد، ممکن است شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد. در مثال ۲ از فضاهای برداری مجموعه توابع $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ پایه ی نامتناهی و شمارش پذیر فضا هستند. در درسهای دیگر به تدریج با فضاهای نامحدود بعد با پایه شمارش ناپذیر آشنا خواهید شد. مثلاً مجموعه فضای حالتهای کوانتمی ذره ای که روی یک محور حرکت می کند نامتناهی با پایه شمارش ناپذیر است.

تمرین ـ برای فضای n تایی های مرتب حقیقی (مثال ۱ فضاهای برداری) نشان دهید بردارهای زیر یک پایه اند

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\\0\end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \quad a_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\5\end{pmatrix}$$

ضرایب بسط یک بردار دلخواه به صورت $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_5\end{pmatrix}$ A_2 را برحسب a_1 تا a_5 به دست آورید.

۳ـ ضرب داخلی

اعمال جمع بردارها و ضرب بردار در عدد خاصیت طبیعی و پایه‌ای هر فضای برداری است. روی فضای برداری ممکن است اعمال دیگری هم بتوان تعریف کرد. یکی از عمل‌هایی که خواص ریاضی و کاربردهای فیزیکی مهمی دارد ضرب داخلی یا ضرب نقطه‌ای است. ضرب داخلی از دو بردار متعلق به فضا یک عدد می‌سازد. به عبارت دیگر نگاشتی است از ضرب دکارتی مجموعه در خودش به اعضای میدانی که فضای برداری روی آن تعریف شده است. در این درس فقط فضاهای برداری حقیقی را در نظر گرفتیم. بنابراین ضرب داخلی دو بردار عضو فضا را به یک عدد حقیقی می‌برد. اگر روی یک فضای برداری ضرب داخلی تعریف شده باشد به آن "فضای ضرب داخلی" نیز گفته می‌شود. نمادهای مختلفی برای نشان دادن ضرب داخلی دو بردار به کار می‌رود که نمونه‌هایی از آنها را در زیر می‌بینید:

$a \cdot b \equiv (a,b) \equiv \langle a,b\rangle \equiv \langle a|b\rangle =$ ضرب داخلی بردارهای a و b

ضرب داخلی شرایطی دارد که از قرار زیر هستند:

الف ـ جابه‌جایی $\qquad a \cdot b = b \cdot a$

(این شرط در حالت اعداد مختلط متفاوت است)

ب - توزیع در جمع برداری

$$(a+b).c$$

ج - ترکیب با ضرب در یک عدد

$$(\alpha a).b = \alpha (a.b)$$

(این خاصیت نیز در هیات اعداد مختلط فرق دارد)

د - مثبت معین بودن

$$a.a \geq 0 \;;\; a.a = 0 \Longleftrightarrow a = 0$$

~~خاصیت چهارم نیز با [illegible] بردار [illegible]~~

سه خاصیت نخست الزامی است، اما خاصیت چهارم را می‌توان پذیرفت یا نپذیرفت. اگر این خاصیت برقرار باشد می‌توان برای هر بردار طول یا اندازه تعریف کرد که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|a| = \sqrt{a.a}$$

علامت $\|a\|$ نیز در بعضی کتابها به کار می‌رود. روشن است که فقط وقتی ضرب داخلی هر بردار در خودش مثبت باشد می‌توان مفهوم اندازه یک بردار را پذیرفت. تنها یک بردار به طول صفر داریم و آن هم بردار صفر است.

در درس مکانیک که بیشتر با فضای سه بعدی معمولی سروکار داریم این خاصیت را فرض می‌کنیم. در مکانیک کوانتمی نیز اندازه بردارها لازم هستند و خاصیت فوق مفروض است. اما در نسبیت خاص خاصیت چهارم در نظر گرفته نمی‌شود و ممکن است بردارهایی داشته باشیم که حاصل ضرب آنها در خودشان منفی یا صفر هم باشد.

ضرب داخلی روی یک فضای برداری منحصر به فرد نیست. ممکن است بر روی یک فضا بشود ضرب‌های داخلی متعددی را فرض کرد. کافی است که هر کدام از آنها خواص ذکر شده را داشته باشند.

مثال ۱- در فضای برداری n تایی‌های مرتب ضرب داخلی را چنین تعریف می‌کنیم

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_N\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_N\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\beta_i$$

اثبات درستی خواص ضرب داخلی در این مورد ساده است. اگر در همین مثال ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می کردیم

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_N\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_N\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\beta_i - \sum_{i=k+1}^{N}\alpha_i\beta_i \qquad k<N$$

آنگاه چنین ضربی خواص سه گانه اصلی ضرب داخلی را داشت اما مثبت معین نبود یعنی خصوصیت چهارم را نداشت.

مثال ۲- در فضای توابع (حقیقی) $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ ضرب داخلی بردار f در بردار g را چنین تعریف می کنیم

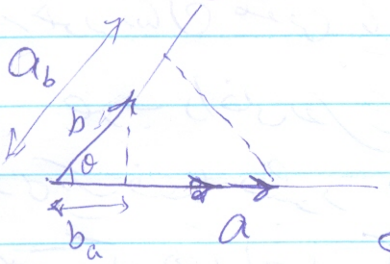
$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

تحقیق خواص ۴ گانه در این مورد نیز ساده است و به خواننده توصیه می شود حتماً این کار را روی کاغذ انجام دهد. اگر توابع روی اعداد مختلط تعریف شده بود تعریف این ضرب اندکی تفاوت داشت.

مثال ۳- در فضای بردارهای معمولی فضای ۳ بعدی (مجموعه خطهای جهت دار) ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$a\cdot b = |a||b|\cos\theta$$

که θ زاویه بردارهای a و b است. با استفاده از شکل ۶ می توان نشان داد



$$a\cdot b = a_b\, b = a\, b_a$$

که a_b تصویر a بر روی b و b_a تصویر b روی a است. در حالتی که $\frac{\pi}{2} < \theta$ تصویر هر بردار روی دیگری خلاف آن است و منفی در نظر گرفته می شود.

تمرین: با استفاده از رابطه فوق و استدلال های هندسی خواص ضرب داخلی را در

مثال آخر تحقیق کنید.

در این مثال برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ حاصل ضرب داخلی دو بردار غیرصفر، صفر است.

این مفهوم را تعمیم می‌دهیم و برای هر فضای برداری دلخواه می‌گوییم دو بردار بر هم عمود هستند هرگاه ضرب داخلی آنها صفر باشد. مجموعه بردارهای a_1 تا a_N را متعامد گوییم هرگاه اگر ضرب داخلی هر دو بردار متمایز از مجموعه صفر باشد.

تمرین - ثابت کنید هر مجموعه بردار متعامد مستقل خطی است.

چنانچه مجموعه بردارهای فوق کامل نیز باشد به آن یک پایه متعامد گوییم. اگر بردارهای فوق چنان باشند که طول هرکدام نیز برابر با واحد باشد خواهیم داشت

$$a_i \cdot a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

به نماد δ_{ij} دلتای کرونکر می‌گوییم. در این صورت مجموعه فوق را "متعامد بهنجار" می‌گوییم. اگر این مجموعه پایه نیز باشد به آن "پایه متعامد بهنجار" می‌گوییم.

فرض کنید بردار دلخواه $\vec{A}$ را بر حسب پایه متعامد بهنجار a_1 تا a_N بسط دهیم:

$$A = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i a_i$$

به α_iها مؤلفه‌های بردار A می‌گوییم و $\alpha_i a_i$ (برای یک i مشخص) تصویر بردار A در امتداد a_i است. برای پیدا کردن مؤلفه jام A یعنی α_j طرفین رابطه فوق را در a_j ضرب داخلی می‌کنیم. با استفاده از خواص توزیعی ضرب داخلی در یک ترکیب خطی از بردارها (خواص ب و ج) داریم

$$a_j \cdot A = a_j \cdot \sum_{i=1}^{N} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (a_j \cdot a_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{ji} = \alpha_j \qquad (99-1)$$

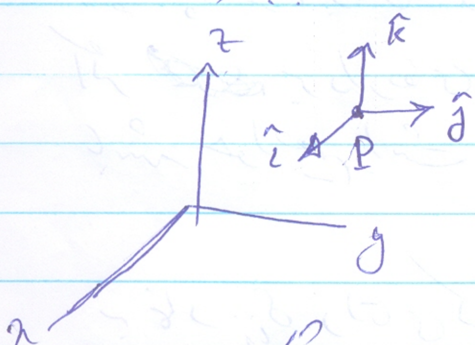
در گام آخر محاسبه به نحوهٔ اثر دلتای کرونکر در جمع توجه کنید. در این تنها جملهٔ

از ~~[illegible]~~ جمع "ده" (عبارت زیر علامت Σ) باقی می ماند که در آن $i=j$. در این جمع زی شاخص i که روی آن جمع صورت نمی گیرد را شاخص آزاد و شاخص j که روی آن جمع انجام می شود را شاخص نخودی می نامیم. اگر در عبارت بسط A به جای مؤلفه به مقدار آن $a_i \cdot A$ را قرار دهیم خواهیم داشت

$$A = \sum_i (a_i \cdot A)\, a_i$$

به این ترتیب تصویر A در امتداد a_i برابر است با $(a_i \cdot A)\, a_i$

در فضای سه بعدی معمولی به بردارهای یک پایه متعامد بهنجار، بردارهای یکه متعامد می گوییم. در شکل ۷ سه بردار یکه متناظر با مختصات x، y و z در نقطه P رسم شده اند، که آنها را $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ نامیده ایم. ~~[illegible]~~ در این متن بردارهای یکه را با علامت کلاه ^ روی بردارها نشان می دهیم.



شکل ۷

بردار یکه $\hat{i}$ جهتی را نشان می دهد که اگر در آن جهت حرکت کنیم y و z تغییر نمی کند و x بیشترین تغییرات را دارد و به همین ترتیب بردارهای $\hat{j}$ و $\hat{k}$ در جهت تغییرات مختصات y و z هستند. این سه بردار را با $\hat{e}_x$، $\hat{e}_y$ و $\hat{e}_z$ یا $\hat{x}$، $\hat{y}$ و $\hat{z}$ نیز نشان می دهند. در مواردی که نیاز به جمع زدن روی بردارهای پایه وجود دارد بهتر است از نماد $\hat{e}_1$، $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$ استفاده کنیم که همان $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ هستند. به این ترتیب داریم

$$A = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$$
$$= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

حال می خواهیم ضرب داخلی دو بردار در فضای برداری دلخواه را بر حسب مؤلفه های آنها در یک پایه متعامد بهنجار به دست آوریم. به

محاسبه زیر توجه کنید

$$A\cdot B = \left(\sum_{i=1}^{N} A_i e_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} B_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} A_i B_j \; e_i\cdot e_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} A_i B_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{N} A_i B_i$$

در این محاسبه چند نکته قابل توجه است. یکی اینکه دو عبارتی که در هم ضرب شده‌اند هر کدام از یک جمع روی یک جمع‌ده متغیر ساخته شده‌اند. شاخص جمع‌ده در هر کدام از دو عبارت به طور مستقل از ۱ تا N می‌روند. به این ترتیب در حالت کلی N^2 جمله به دست می‌آید که از ضرب هر یک از جملات مجموع اول در هر یک از جملات مجموع دوم حاصل می‌شود. برای اینکه این جملات به درستی در نظر گرفته شوند لازم است حتماً از دو اندیس تکراری با نامهای متفاوت استفاده شود تا مفهوم دو جمع مستقل از هم لحاظ شود. اگر اشتباهاً شاخص‌های تکراری یکسان در نظر گرفته می‌شد فقط N جمله می‌داشتیم.

نکته دیگر آن است که محاسبه فوق از نوع ضرب داخلی و بعد فضا مستقل است و برای هر فضای برداری که نوعی ضرب داخلی روی آن تعریف شده باشد و یک پایه متعامد بهنجار برای آن فرض شده باشد نتیجه همین است. برای حالت خاص فضای سه بعدی و ضرب داخلی معمولی (مثال سوم بخش ضرب داخلی) داریم

$$A\cdot B = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

با استفاده از تعریف ضرب داخلی در فضای سه بعدی می‌توان زاویه دو بردار را هم با داشتن مؤلفه‌های آنها به دست آورد:

$$\cos\theta = \frac{A\cdot B}{|A||B|} = \frac{\sum A_iB_i}{\sqrt{(\sum A_i^2)(\sum B_j^2)}} \qquad (1.1-1)$$

یک تعمیم جالب آن است که برای هر فضای ضرب داخلی زاویه دو بردار را به شکل فوق تعریف کنیم. برای این کار کافی است کلیه جمع ها در رابطه فوق را به جای از یک تا سه، از ۱ تا n در نظر بگیریم. به این ترتیب مثلاً در یک فضای n بعدی که اصولاً قابل تجسم نیست مفهوم زاویه دو بردار را تعریف می کنیم. اما یک نکته مهم را در نظر نگرفتیم. کسینوس یک زاویه حتماً باید عددی کوچکتر از ۱ باشد. چه تضمینی است که تعمیم رابطه (۱-۱۰) به n بعد طوری باشد که $\cos\theta < 1$ ها.
قضیه شوارتز این را تضمین می کند.

قضیه شوارتز - برای هر ضرب داخلی مثبت معین (دارای خاصیت د) داریم

$$A\circ B \le |A|\,|B|$$

تمرین - نامساوی شوارتز را اثبات کنید.
راهنمایی: به ازای هر α دلخواه $|A-\alpha B|^2 \geq 0$. حال α را چنان انتخاب کنید که نامساوی شوارتز اثبات شود.

سری فوریه

در مثال صفحه ۱۲ دیدیم که مجموعه توابع $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ کامل اند یعنی هر تابعی در بازه $\theta\in[-\pi,\pi]$ را بر حسب آنها می توان بسط داد. با محاسبه مستقیم می شود نشان داد

انتگرال ها

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\theta \, \sin m\theta \, d\theta = 0 \qquad n\neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \, \cos m\theta \, d\theta = 0 \qquad n\neq m$$

$$\int \sin n\theta \, \cos m\theta \, d\theta = 0 \qquad \text{برای هر } m, n$$

یعنی مجموعه توابع فوق متعامدند. برای بهنجار کردن این مجموعه باید آنها را در ضرایب مناسب ضرب کرد. جواب نهایی این است که مجموعه توابع

$$f_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\theta \qquad g_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\theta \quad (n\neq 0), \quad g_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

در بازه $[-\pi,\pi]$ متعامد بهنجار هستند.

تمرین - نشان دهید

$$\int |f_n(\theta)|^2 d\theta = \int |g_n(\theta)|^2 d\theta = 1$$

حال تابع دلخواه $\psi(\theta)$ را در نظر بگیرید. با توجه به کامل بودن سری فوریه داریم

$$\psi(\theta) = \sum \left(\alpha_n f_n(\theta) + \beta_n g_n(\theta) \right)$$

ضرایب α_n و β_n ضرایب بسط فوریه نامیده می‌شوند. با استفاده از رابطه (۱-۹۹) برای این ضرایب داریم

$$\alpha_n = \langle f_n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin n\theta \, \psi(\theta) \, d\theta$$

$$\beta_n = \langle g_n | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta \, \psi(\theta) \, d\theta \qquad n \neq 0$$

$$\beta_0 = \langle g_0 | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) \, d\theta$$

این نتیجه قضیه معروف فوریه است که دارای کاربردهای وسیعی در فیزیک و مهندسی است. در فصل‌های بعد به وفور از این قضیه استفاده خواهیم کرد.

۴- ضرب خارجی

پیش از پرداختن به مفهوم ضرب خارجی در فضای سه بعدی به تعریف یکی دو ساختار جبری دیگر می‌پردازیم، مفاهیم جبر و جبرلی.

تعریف - جبر شرکت‌پذیر - ساختار جبر شرکت‌پذیر عبارت است از یک فضای برداری که روی آن یک عمل ضرب بسته و شرکت‌پذیر (و نه لزوماً وارون پذیر) تعریف شده باشد. بنابراین در یک جبر شرکت‌پذیر سه عمل جمع، ضرب در عدد و ضرب بردارها در هم تعریف شده است. حاصل ضرب دو بردار در هم بردار دیگری در آن فضا است. مفهوم شرکت‌پذیری نیز برای خواننده آشناست:

$$A, B \in V \Rightarrow AB \in V , \qquad A(BC) = (AB)C$$

مثال - مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ یک فضای برداری اند. جمع هر دو ماتریس، ماتریسی است که درایه‌هایش جمع درایه‌های نظیر ماتریس‌های مربوط است. ضرب عدد در یک ماتریس نیز ماتریسی است که همه درایه‌هایش در آن عدد ضرب شده‌اند. حال در این فضا می‌توان عمل ضرب ماتریس‌ها را هم در نظر گرفت. حاصل ضرب دو

ماتریس $n\times n$ باز هم یک ماتریس $n\times n$ است. ضرب ماتریس‌ها به شکل کلی که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

AB

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

از این تعریف می‌توان خاصیت شرکت‌پذیری برای ضرب سه ماتریس $n\times n$ را نیز تحقیق کرد.

تعریف - جبر لی - جبر لی یک فضای برداری است که روی آن عمل ضربی با خواص زیر فرض شده باشد (ضرب بردارهای A ، B را به صورت $[A,B]$ نشان می‌دهیم)

الف- پادجابجایی

$$[A,B] = -[B,A]$$

ب- توزیع در جمع

$$[A_1+A_2,B] = [A_1,B]+[A_2,B]$$

ج- ترکیب با ضرب در عدد

$$[\alpha A,B] = \alpha [A,B]$$

د- اتحاد ژاکوبی

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$$

از خواص فوق می‌توان نتایج فرعی دیگری مثل موارد زیر را نتیجه گرفت

$$\left[\sum \alpha_i A_i , B\right] = \sum \alpha_i [A_i , B]$$

$$\left[A , \sum \beta_i B_i\right] = \sum \beta_i [A , B_i]$$

به این خاصیت‌ها که از الف، ب و ج نتیجه شده "دوخطی بودن" عمل ضرب فوق گفته می‌شود. خاصیت چهارم در واقع جایگزین خاصیت شرکت‌پذیری شده است. در واقع ضرب مورد نظر شرکت‌پذیر نیست و به جای آن از اتحاد ژاکوبی تبعیت می‌کند. در بیان خواص یک جبر لی در مورد بسته بودن چیزی نگفته‌ایم. حاصل ضرب دو بردار ممکن است برداری در آن فضا باشد و یا در یک فضای برداری دیگر. اینکه حاصل ضرب دو بردار چیست در هر مثال متفاوت است. اما در هر صورت جبرهای لی بسته یک دسته مهم از جبرهای لی هستند که در توصیف رفتار گروه‌های لی کاربرد فیزیکی اهمیت دارند. در این باره بعداً نیز نگاهی خواهیم کرد.

مثال - در فضای برداری ماتریس‌های $n\times n$ ضرب آنها را جابجاگر

آنها می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[A,B] = AB - BA$$

این تعریف نیازمند آن است که ضرب دیگری بین بردارها تعریف شده باشد تا جابه‌جاگر را به عنوان اثر تغییر ترتیب آنها در آن ضرب (مثبتی) در نظر بگیریم. در هر حال در مثال ماتریس‌های $n\times n$ این کار به راحتی انجام می‌شود و مشکلی ندارد. ~~تحقیق خواص جبری برای جابه‌جاگر فوق~~

تمرین ـ خواص جبری را برای جابه‌جاگر ماتریس‌های $n\times n$ تحقیق کنید.

مثال فوق را می‌توان به فضای عملگرهای خطی روی یک فضای برداری دلخواه تعمیم داد. در این باره مطالب زیادی در درس مکانیک کوانتمی خواهید دید.

ضرب خارجی بردارهای سه بعدی

در یک فضای سه بعدی با پایه متعامد یکه $\hat{e}_1$، $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$ ضرب خارجی بردارهای $\vec{A}=\sum A_j \hat{e}_j$ و $B=\sum B_k e_k$ بردار $C=\sum C_i e_i$ است که به صورت $C=A\times B$ نشان داده می‌شود و مؤلفه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$C_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_j B_k \qquad (۱.۲-۱)$$

در این تعریف ϵ_{ijk} اپسیلون لوی چیویتا نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } ijk \text{ دارای ترتیب دوری } 123 \text{ باشد} \\ -1 & \text{〃 } 321 \text{ 〃 〃 〃} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به بیان صریح‌تر ~~مثلاً ϵ_{231} ...~~

$$\epsilon_{123}=\epsilon_{231}=\epsilon_{312}=1 \quad و \quad \epsilon_{213}=\epsilon_{321}=\epsilon_{132}=-1$$

و بقیه صفرند. اگر دو ~~...~~ تا از اندیس‌های ϵ یکسان باشند حاصل صفر است. به ϵ_{ijk} تانسور کاملاً پادمتقارن در سه بعد می‌گوییم. از رابطه (۱.۲-۱) مؤلفه‌های بردار C چنین است

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2$$
$$C_2 = A_3B_1 - A_1B_3 \qquad (۱.۳-۱)$$
$$C_3 = A_1B_2 - A_2B_1$$

تمرین- با استفاده از (۱.۲-۱) و (۱.۳-۱) نشان دهید ضرب خارجی دو بردار خواص جبری را داراست.

تمرین- با استفاده از (۱.۲-۱) یا (۱.۳-۱) ثابت کنید $A\cdot C = B\cdot C = 0$ یعنی ضرب خارجی دو بردار بر هر یک از آنها عمود است.

تمرین- با استفاده از (۱.۳-۱) نشان دهید

$$\hat{e}_1\times\hat{e}_2=\hat{e}_3 \qquad \hat{e}_2\times\hat{e}_3=\hat{e}_1 \qquad \hat{e}_3\times\hat{e}_1=\hat{e}_2$$

ضرب خارجی هر کدام از بردارهای یکه در خودشان صفر است. این نتایج را می‌توان با استفاده از نماد ϵ به صورت زیر نشان داد

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk}\,\hat{e}_k \qquad (۱.۴-۱)$$

تمرین- با محاسبهٔ مستقیم عبارت‌های $|C|^2 = C_1^2+C_2^2+C_3^2$ و نیز $|A|^2$، $|B|^2$ و $|A\cdot B|^2$ را برحسب مؤلفه‌های A و B به دست آورید و نشان دهید

$$|C|^2 = |A|^2|B|^2-(A\cdot B)^2 \qquad (۱.۵-۱)$$

از نتیجه (۱.۵-۱) می‌توان دید که

$$|C| = |A|\,|B|\sin\theta \qquad (۱.۶-۱)$$

بنابراین می‌گوییم ضرب خارجی بردارهای A و B برداری است عمود بر صفحه‌ای که از آن دو ساخته می‌شود و اندازه آن $|A||B|\sin\theta$ است. از میان دو جهتی که بر صفحه A و B عمود است جهت C چنان است که از قاعدهٔ دست راست حساب شود. (اگر A در جهت انگشتان دست راست روی B بچرخد C در جهت شست دست راست است) از روابط (۱.۴-۱) نیز نتیجه می‌گیریم که دستگاه مختصات در جهت $\hat{e}_1$، $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$ یک دستگاه راستگرد است.