ضرب خارجی دو بردار را می‌توان با استفاده از قواعد دترمینان هم نمایش داد. در این نوع نمایش ~~بجای~~ روابط (۱.۶ - ۱) را به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$C = A \times B = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \qquad (۱.۷ - ۱)$$

$$= \hat{e}_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + \hat{e}_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + \hat{e}_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

البته خواننده احتمالاً با دترمینانی آشنایی دارد که تمام اعضای آرایه‌ای عددی باشند. در رابطه (۱.۷ - ۱) یک سطر بردارهای یکه و سطرهای بعدی مؤلفه‌ها هستند. اما وقتی نتیجه دترمینان را حول سطر اول می‌نویسیم حاصل با روابط (۱.۶ - ۱) یکسان است. در این نمایش تمام خواص ضرب خارجی را می‌توان به وضوح مشاهده کرد.

تمرین: با استفاده از نمایش دترمینان نشان دهید ضرب خارجی دو بردار خواص پادجابجایی و دوخطی بودن را داراست و همچنین $A \times A = 0$.

تعریف - ضرب سه‌گانه. بنابه تعریف ضرب سه‌گانه بردارهای A، B و C به صورت ~~$A.(B \times C)$~~ تعریف می‌شود. بنابراین داریم:

~~$A.(B \times C)$~~

$$A.(B \times C) = \sum_i A_i (B \times C)_i$$

$$= A_1 (B_2 C_3 - B_3 C_2) + A_2 (B_3 C_1 - B_1 C_3) + A_3 (B_1 C_2 - B_2 C_1)$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \qquad (۱.۸ - ۱)$$

چنانکه دیده می‌شود ترتیب بردارها و اینکه کدام دو بردار در هم ضرب خارجی

شده‌اند اهمیت دارد. چنانچه می‌دانید اگر جای دو سطر عوض شود حاصل دترمینان در یک منها ضرب می‌شود. حال اگر تبدیل $A \to B \to C \to A$ را انجام دهیم خواهیم داشت

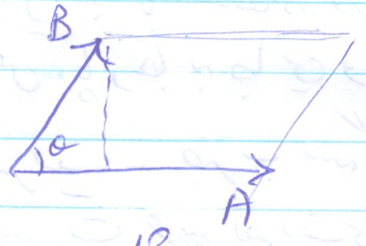
$$C \cdot (A \times B) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

این همان نتیجه عبارت (۱-۱۰۸) است که در آن دو بار جای سطرها عوض شده و نتیجه یکسان است. بنابراین داریم

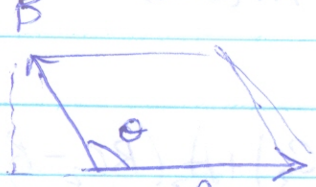
$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C) \qquad (۱-۱۰۹)$$

به عبارت دیگر اگر جای $\times$ و $\cdot$ را در ضرب سه‌گانه عوض کنیم حاصل تغییری نمی‌کند.

تعبیر هندسی ضرب خارجی - با استفاده از رابطه (۱-۱۰۶) و شکل ۸ مشاهده می‌کنیم که اندازه ضرب خارجی دو بردار برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که از آن دو بردار ساخته می‌شود. در واقع مساحت متوازی‌الاضلاع شکل ۸ عبارت است از اندازه قاعده، $|A|$ در ارتفاع $|B|\sin\theta$. شکل ۹ نشان می‌دهد که این نتیجه برای حالتی که زاویه دو بردار منفرجه است نیز صادق است، چرا که در این حالت ارتفاع $|B|\sin(\pi-\theta)$ است که همان $|B|\sin\theta$ می‌شود.

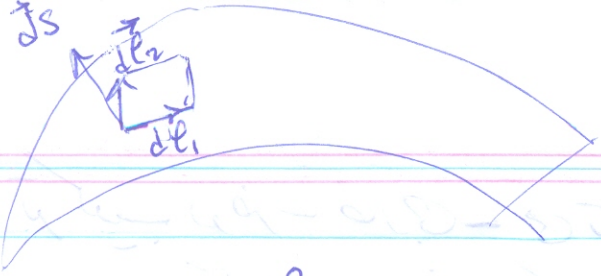


شکل ۸



(شکل ۹)

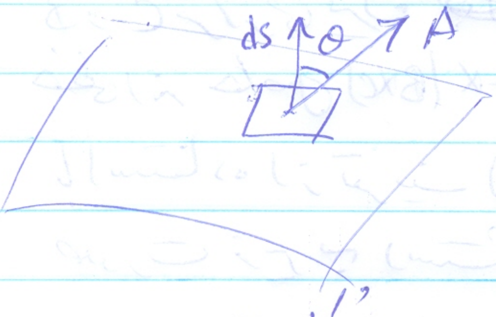
عمود بودن ضرب خارجی دو بردار بر صفحه آنها نیز موضوعی مفید است. به عنوان مثال در فیزیک و آنالیز برداری گاه علاقه‌مند هستیم یک سطح غیرمسطح را به عناصر کوچک سطح تقسیم کنیم. مرسوم است که مساحت هر عنصر دیفرانسیلی (بی‌نهایت کوچک) از سطح را با برداری عمود بر سطح در آن نقطه



شکل ۱۰

نمایش دهیم. همان طور که در شکل (۱۰) می‌بینید عنصری از سطح که از بردارهای دیفرانسیلی $\vec{dl_1}$ و $\vec{dl_2}$ ساخته شده $\vec{ds}=\vec{dl_1}\times\vec{dl_2}$ است.

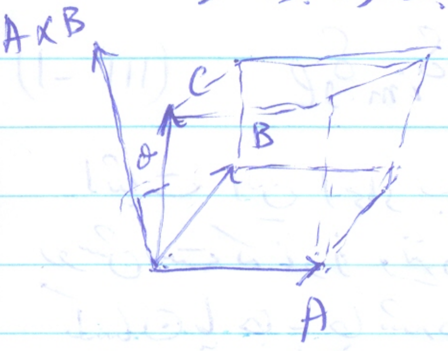
یک نمونه مهم از کاربرد این مفاهیم محاسبهٔ شار یک میدان برداری از یک سطح نامشخص است. هر عنصر شار $d\phi$ مطابق شکل (۱۱) به صورت حاصل ضرب اندازهٔ بردار $\vec{A}$ در یک نقطه از سطح در مساحت عنصر سطح در کسینوس زاویه $\vec{A}$ با عمود بر سطح است. چنانکه دیده می‌شود می‌توان نوشت:



شکل ۱۱

$$d\phi = |A||ds|\cos\theta = A\cdot ds = A\cdot(dl_1\times dl_2) \qquad (۱۱۰-۱)$$

حال می‌خواهیم تعبیر هندسی ضرب سه گانه سه بردار را بررسی کنیم.



شکل (۱۲)

در شکل (۱۲) از سه بردار A و B و C که در یک صفحه نیستند یک متوازی السطوح درست کرده‌ایم. این کار همیشه امکان‌پذیر است. چنانکه دیدیم $|A\times B|$ برابر است با مساحت وجهی از متوازی السطوح که از بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ساخته شده است. وقتی $\overrightarrow{A\times B}$ را در بردار $\vec{C}$ ضرب داخلی می‌کنیم حاصل برابر است با مساحت وجه ذکر شده در ارتفاع که $C\cos\theta$ است. بنابراین ضرب سه گانه سه بردار حجم متوازی السطوحی را نشان می‌دهد که از آن سه بردار ساخته می‌شود. روشن است که اگر سه بردار در یک صفحه باشند حجم متوازی السطوح و نتیجه ضرب سه گانه صفر است.

ترکیب دو ضرب خارجی – می توان حاصل ضرب خارجی دو بردار را مجدداً در بردار دیگری ضرب خارجی کرد. فرض کنید می خواهیم $A\times(B\times C)$ را حساب کنیم. بردار $\vec{B}\times\vec{C}$ عمود بر صفحه $\vec{B}$ و $\vec{C}$ است. وقتی این بردار را در بردار دیگری ضرب کنیم حاصل بر $\vec{B}\times\vec{C}$ عمود است و در صفحه B و C قرار می گیرد. چون دو بردار $\vec{B}$ و $\vec{C}$ در یک امتداد نیستند و مستقل خطی اند حاصل $A\times(B\times C)$ را باید بتوان به صورت ترکیبی از بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{C}$ نوشت.

با استفاده از تعریف (۱-۱۰۲) می توان مؤلفه iام بردار مورد نظر را به صورت زیر بدست آورد.

$$[A\times(B\times C)]_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} A_j (B\times C)_k$$

$$= \sum_{j,k,l,m} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} A_j B_l C_m \qquad (111-1)$$

برای محاسبه عبارت فوق از اتحاد بسیار مفید زیر استفاده می کنیم

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad (112-1)$$

اثبات این اتحاد به سادگی از طریق "وارسی" حالتهای مختلف امکان پذیر است. روشن است که i و j و نیز l و m که اندیس های آزاد هستند باید زوجهای یکسان یا جابجا شده از دو اندیس متمایز باشند. مثلاً برای $k=1$ اندیسهای i و j باید ۲ و ۳ یا ۳ و ۲ باشند و به همین ترتیب l, m. اگر زوج ij همان lm باشد حاصل یک است و اگر جابجا شده آنها باشد حاصل (۱-) است. رابطه (۱-۱۱۲) همین موارد را به زبان ریاضی بیان می کند.

برگردیم به رابطه (۱-۱۱۱). با توجه به اینکه $\epsilon_{klm}=\epsilon_{lmk}$ داریم

$$[A\times(B\times C)]_i = \sum_{j,l,m} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m$$

$$= \sum_j (A_j B_i C_j - A_j B_j C_i) = B_i(A\cdot C) - C_i(A\cdot B) \qquad (114-1)$$

در این محاسبه از عبارتهایی همچون $\sum_l \delta_{il} B_l = B_i$ استفاده کرده‌ایم.
نتیجه (۱-۱۱۳) را می‌توان به صورت برداری زیر بیان کرد

$$A\times(B\times C) = B(A.C) - C(A.B) \qquad (۱۱۴-۱)$$

این اتحاد بسیار معروف و مورد استفاده است و بنا به طوری که سمت راست خوانده می‌شود اتحاد "بک-کب" نامیده می‌شود.

تمرین: با استفاده از اتحاد بک-کب، اتحاد جاکوبی را اثبات کنید:

$$A\times(B\times C) + B\times(C\times A) + C\times(A\times B) = 0$$

تمرین - عبارت‌های زیر را حساب کنید

$$(A\times B).(C\times D) = ?$$
$$(A\times B)\times(C\times D) = ?$$

این کار را هم با استفاده از اتحاد بک-کب و هم با استفاده مکرر از اتحاد (۱-۱۱۲) انجام دهید.

لازم به دقت است که محتوای ریاضی اتحاد (۱-۱۱۲) همان اتحاد بک-کب است.

~~بردارها و ضرب‌ها~~

قرارداد جمع‌زنی اینشتین - نگاهی مجدد به برخی از روابط این بخش از قبیل (۱-۱۰۲)، (۱-۱۱۱) و (۱-۱۱۲) نشان می‌دهد که در کلیه عبارتها هر شاخص از دو حالت خارج نیست، یا یک شاخص آزاد است که روی آن جمع نشده و در دو طرف حضور دارد، مثل شاخص i در دو طرف رابطه (۱-۱۰۲)؛ و یا شاخصی است که دو بار تکرار شده و روی آن از یک تا سه جمع شده است. بنابراین می‌توان علامت جمع‌زنی را حذف کرد بدون آنکه مفهومی خدشه‌دار شود. بنا بر قرارداد جمع‌زنی اینشتین هرگاه شاخصی تکرار شود روی آن جمع زده می‌شود. هرگز در یک عبارت نباید شاخصی سه بار، چهار بار و یا بیشتر اتفاق بیفتد. اگر اندیسی سه بار آمده نشان می‌دهد که به اشتباه یک شاخص تکراری که روی آن جمع شده با یک شاخص آزاد یکسان گرفته شده

که این کار اشتباه است. همین طور اگر اندیس ٤ بار آمده یعنی دو تا اندیس گردی مثل هم گرفته شده است که نباید چنین گرفته می شد. بنابراین می توان با خیال راحت تمام علامتهای جمع زنی را از عبارتها حذف کرد. در موارد استثنایی که یک شاخص دو بار می آید و منظور جمع زنی روی آن نیست باید صریحاً ذکر کرد.

بعد فیزیکی بردارها و حاصل ضرب ها -

در این بخش فرض می کنیم خواننده با مفهوم بعد فیزیکی کمیتها آشناست. به عنوان مثال می دانیم که فقط کمیتهای هم جنس را می شود با هم جمع کرد. مثلاً نمی شود یک طول (برحسب متر) را با یک سرعت (برحسب متر بر ثانیه) با هم جمع کرد. اما برای ضرب کمیتها ممکن است جنس آنها با هم فرق داشته باشد. مثلاً از حاصل ضرب کمیتی از جنس طول در کمیتی از جنس سطح کمیتی از جنس حجم به دست می آید.

در این فصل با انواع اعمال ریاضی آشنا شدیم و خواص جبری هر یک این اعمال را بررسی کردیم. از زاویه نگاه ریاضی جمع کردن نیز نوعی ضرب است و تفاوت ماهوی میان عمل های مختلف نیست. در واقع از دید چوب ریاضی همه کمیتها بدون بعد هستند و تنها محدودیت روی عمل های مختلف ریاضی سازگاری ساختاری آنهاست. اما در فیزیک ما محدودیت هایی به لحاظ جنس فیزیکی کمیتها قائل می شویم که در این بخش آنها را توضیح می دهیم.

مهمترین نکته آن است که عمل جمع برداری فقط بین بردارهای از یک نوع امکان پذیر است. مثلاً فقط سرعتها را با هم می شود جمع کرد و هرگز نمی شود برداری از جنس سرعت را با برداری از جنس نیرو با هم جمع کرد. اما می توان برای ضرب کردن عدد در بردار کمیتهای از انواع مختلف را در هم ضرب کرد، مثلاً می توان اسکالر جرم را در بردار

شتاب ضرب کرد و کمیتی از جنس نیرو ساخت. این فرق گذاشتن میان بردارهای که از جمع بردارها باهم به دست می آید با بردارهایی که از ضرب کردن عدد در بردار به دست می آید نکته ی ظریفی است که بر ساختارهای ریاضی شناخته شده باید تحمیل شود. به این ترتیب اصلاح کوچکی در تعریف فضای برداری به صورت زیر صورت می دهیم تا مفهوم بعد نیز یکی لحاظ شود.

در قدر یک فضاهای برداری مجزا از هم داریم که عمل جمع برداری فقط در داخل هر یک از آنها امکان پذیر است. همچنین ضرب اعداد بدون بعد نیز در بردارهای هر فضا امکان دارد. علاوه براین امکان دارد از ضرب عددهای بعد دار در بردارهای یک فضا، بردارهای فضای دیگر نیز درست کرد.

به عنوان مثال مجموعه بردارهای ~~[illegible]~~ نیرو و عددهای بدون بعد یک فضای برداری است و مجموعه شتابها و عددهای بدون بعد یک فضای برداری دیگر است. اما از حاصل ضرب عددهای از جنس جرم در بردارهای فضای شتابها، بردارهای فضای نیروها به دست می آید. همچنین می شود از ضرب عددی از جنس MT^{-1} (جرم بر زمان) در یک بردار سرعت نیز برداری از جنس نیرو ساخت. به عنوان مثال به رابطه زیر در مورد حرکت یک دستگاه با جرم متغیر توجه کنید

$$\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dM}{dt}\vec{V}_{rel}$$

چنانکه دیده می شود برداری از جنس نیرو حاصل جمع برداری از جنس شتاب در عددی از جنس جرم و برداری از جنس سرعت با عددی از جنس جرم بر زمان است.

برای سهولت می توان یک فضای برداری مبنا که بدون بعد است در نظر گرفت که بردارهای پایه آن نیز بردارهای بدون بعد $\hat{e}_1$، $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$ باشند و با ضرب کردن اعدادی از جنس های مختلف بردارهای فضاهای

مختلف را بنا کرد. به این ترتیب بعد فیزیکی بردار $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$ که راه همان بعد مؤلفه‌های A_i است.

برای ضرب داخلی نیز محدودیتی روی بعدها وجود ندارد. می‌توان بردارهای متعلق به فضاهای ~~~~ یا جنس‌های مختلف را در هم ضرب کرد. مثلاً می‌توان نیرو را در جابه جایی ضرب داخلی کرد و اسکالری از جنس کار (یا انرژی) درست کرد.

در ضرب خارجی بردارها نیز هم جنس بودن شرط نیست. بردارهای از جنس‌های مختلف را می‌توان در هم ضرب خارجی کرد. مثلاً ~~~~ در رابطه $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ از ضرب کردن بردار مکان (از جنس طول) در بردار تکانه (از جنس MLT^{-1}) بردار اندازه حرکت زاویه‌ای از جنس ML^2T^{-1} به دست می‌آید.

در مفهوم ساختار جبر، ~~~~ به دلیل بسته بودن مجموعه لازم است ضرب دو بردار از یک جنس، بردار دیگری از همان جنس بشود. بنابراین ساختار جبر را فقط برای کمیتهای بدون بعد می‌توان تعریف کرد. اما برای جبری شرط بسته بودن را در نظر نگرفتیم. بنابراین در یک جبری می‌توان کمیتهای با جنس‌های مختلف را در هم ضرب کرد. در برخی استفاده‌های فیزیک به جبرهای لی بسته علاقه‌مند هستیم. مثلاً مولدهای گروه دوران یا مولدهای گروه لورنتز هرکدام یک جبر لی بسته درست می‌کنند. در این موارد کمیتها لزوماً باید بدون بعد باشند.

مشتق گیری از بردارها -

بردارها ممکن است تابعی از یک یا چند متغیر باشند. در این قسمت فرض می‌کنیم بردار $\vec{A}$ تابعی از اسکالر s است، که در بازهٔ مشخصی از اعداد حقیقی تغییر می‌کند. به ازای هر مقداری از s، بردار $\vec{A}(s)$ معین است. بنابراین $\vec{A}(s_1)$ و $\vec{A}(s_2)$ دو بردار متمایز هستند. اگر s_1 و s_2 تفاوت اندکی

در حالت کلی

داشته باشند $\vec{A}(s_1)$ و $\vec{A}(s_2)$ هم تفاوت اندکی خواهند داشت. بنابراین می‌توان در مورد آهنگ تغییرات $\vec{A}(s)$ به ازای مقدار مشخص از s صحبت کرد. بنا به تعریف مشتق بردار $\vec{A}$ نسبت به s عبارت است از

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{A}(s+\Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s} \qquad (115-1)$$

برای خواننده‌ای که از قبل با مفهوم مشتق‌گیری آشنا است، تعریف (115-1) به راحتی قابل درک است. تنها نکته شایان توجه آن است که در صورت کسر فوق تفاضل دو بردار را داریم که حاصل آن تغییرات بسیار کوچک $\vec{A}(s)$ به ازای تغییر کوچکی در s است. با استفاده از تعریف (115-1) و خواص فضای برداری به راحتی می‌توان اتحادهای زیر را برای مشتق بردارها ثابت کرد:

الف - $$\frac{d}{ds}(A_1 + A_2) = \frac{dA_1}{ds} + \frac{dA_2}{ds} \qquad (116-1)$$

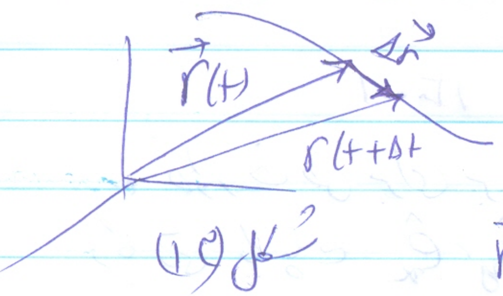
ب - $$\frac{d}{ds}(fA) = \frac{df}{ds}\vec{A} + f\frac{d\vec{A}}{ds} \qquad (117-1)$$

ج - $$\frac{d}{ds}(A\cdot B) = \frac{d\vec{A}}{ds}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{ds} \qquad (118-1)$$

د - $$\frac{d}{ds}(A\times B) = \frac{d\vec{A}}{ds}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{ds} \qquad (119-1)$$

تمرین - روابط (116-1) تا (119-1) را اثبات کنید.

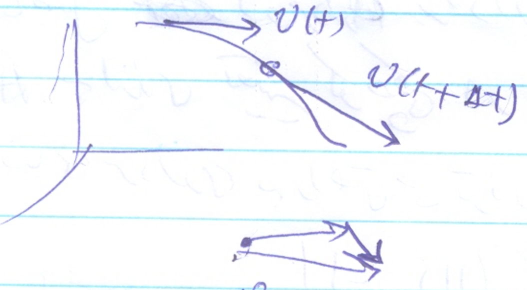
یک مصداق بارز از مشتق‌گیری بردار، نسبت به تعریف سرعت و شتاب مربوط است. اگر $\vec{r}(t)$ مکان یک ذره نسبت به مبدأ مختصات معینی باشد، مسیر ذره در فضای سه بعدی از وصل کردن نقاط پیوسته‌ای که از محل ذره در لحظه‌های مختلف، یعنی انتهای $\vec{r}(t)$ در لحظه‌های مختلف، به دست می‌آید، تشکیل می‌شود. تفاوت $\vec{r}(t+\Delta t)$ و $\vec{r}(t)$



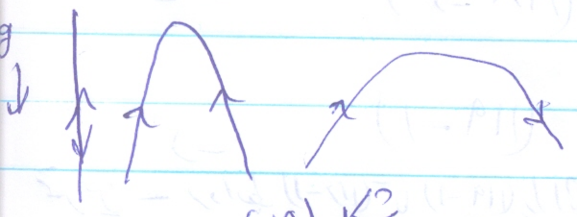
شکل (12)

برای Δt کوچک، بردار کوچک $\Delta\vec{r}$ است که تقریباً قطعه کوچکی از مسیر ذره را تشکیل می دهد. در حالت حدی بردار $d\vec{r}$ جزء دیفرانسیلی مسیر است. بنابراین اگر بردار سرعت را به صورت $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ تعریف کنیم، مماس بر مسیر در هر نقطه خواهد بود و بزرگی آن نیز به آهنگ طی کردن طول مسیر در واحد زمان بستگی دارد.

به همین ترتیب $\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$ تغییرات بردار سرعت در زمان Δt را نشان می دهد و $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ شتاب لحظه‌ای نام دارد. بردار شتاب را نمی توان تنها مانند سرعت درک هندسی کرد. می توان بردارهای $\vec{v}(t+\Delta t)$ و $\vec{v}(t)$ را مطابق شکل (۱۴) از یک نقطه رسم کرد و $\Delta\vec{v}$ را رسم کرد و نهایتاً نسبت $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ را در حالت حدی $\Delta t\to 0$ تجسم کرد. اما بردار $\vec{a}$ نسبت مشخصی با شکل ظاهری مسیر ندارد و همین درک هندسی آن را مشکل می کند. مثلاً در همهٔ مسیرهای شکل (۱۵) شتاب ثقل g به طرف پایین است و مقدار آن یکسان است، اما شکل ظاهری مسیر تفاوت دارد که به مقادیر اولیه سرعت و زاویه پرتاب بستگی دارد.



شکل (۱۴)


شکل (۱۵)

در یک دستگاه مختصات معین بردارهای یکه $\hat{e}_x$، $\hat{e}_y$ و $\hat{e}_z$ ثابت هستند و به هیچ متغیری بستگی ندارند. بنابر خواص (۱-۱۱۶) و (۱-۱۱۷) می توان نوشت

$$\vec{A}=A_1(s)\,\hat{e}_x+A_2(s)\,\hat{e}_y+A_3(s)\,\hat{e}_z$$

$$\frac{d\vec{A}}{ds}=\frac{dA_1}{ds}\hat{e}_1+\frac{dA_2}{ds}\hat{e}_2+\frac{dA_3}{ds}\hat{e}_3 \qquad ۱۲۰-۱$$

به طور خاص برای بردارهای مکان، سرعت و شتاب در مختصات دکارتی با پایه $\hat{e}_x$، $\hat{e}_y$، $\hat{e}_z$ می توان نوشت:

$$\vec{r} = x(t)\,\hat{e}_x + y(t)\,\hat{e}_y + z(t)\,\hat{e}_z \qquad (۱-۱۲۰)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{e}_x + \frac{dy}{dt}\hat{e}_y + \frac{dz}{dt}\hat{e}_z \equiv v_x\hat{e}_x + v_y\hat{e}_y + v_z\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\hat{e}_z$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{e}_z$$

در تمام این درس رسم ما این است که مشتق گیری نسبت به زمان را با علامت نقطه روی کمیت مربوطه (اعم از بردار یا کمیت عددی) نشان می دهیم. به این ترتیب می توان نوشت

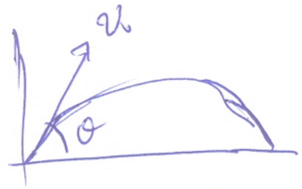
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\hat{e}_x + \dot{y}\,\hat{e}_y + \dot{z}\,\hat{e}_z \qquad (۱-۱۲۱)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \dot{v}_x\,\hat{e}_x + \dot{v}_y\,\hat{e}_y + \dot{v}_z\,\hat{e}_z \qquad (۱-۱۲۲)$$

$$= \ddot{x}\,\hat{e}_x + \ddot{y}\,\hat{e}_y + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

در یک مسئله مکانیک که دستگاه فیزیکی ما ذره است، هدف غایی آن است که مکان ذره را برحسب زمان پیدا کنیم. یعنی بتوانیم بگوییم که ذره در هر لحظه زمان در چه نقطه‌ای از فضا قرار دارد. با داشتن بردار مکان در هر لحظه، یعنی $\vec{r}$ به عنوان تابعی از t می توان با مشتق گیری بردارهای سرعت و شتاب آن را نیز پیدا کرد و از روی آنها کلیه کمیتهای فیزیکی مربوطه به ذره را حساب کرد. به $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ معادلات پارامتری مسیر می گوییم.

گاه مسئله برعکس است، یعنی شتاب ذره را داریم و سرعت و مکان آن را می خواهیم. در این باره در فصل بعد بیشتر سخن خواهیم گفت.



شکل (۱-۱۶)

مثال ۱-۱۷- پرتابه- فرض کنید مؤلفه‌های بردار مکان پرتابه شکل (۱-۱۶) به صورت زیر باشد

$$x = (v_0 \cos\theta)\,t$$

$$y = -\frac{1}{2}g t^2 + (v_0 \sin\theta)\,t$$

سرعت و شتاب ذره را به دست آورید.

با مشتق‌گیری مستقیم داریم

$$\vec{v}(t) = (v_0 \cos\theta)\hat{e}_x + (-gt + v_0 \sin\theta)\hat{e}_y$$

$$a(t) = -g\hat{e}_y$$

چنانکه دیده می‌شود بردار شتاب همواره ثابت و در جهت $(-y)$ است و مولفه v_x بردار سرعت نیز همواره ثابت و برابر با مقدار اولیه آن یعنی $v_0\cos\theta$ است. اما مولفه v_y بردار سرعت به صورت خطی و با آهنگ $(-g)$ با زمان کاهش می‌یابد و از مقدار اولیه آن یعنی $v_0\sin\theta$ کم می‌شود.

مثال ۳- حرکت دایره‌ای یکنواخت-

شکل (۱۷)

ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع R می‌چرخد به گونه‌ای که زاویه شعاع واصل به آن با محور x به صورت $\theta = \omega t$ تغییر می‌کند (شکل ۱۷). مکان، سرعت و شتاب آن را به دست آورید.

در مثلث قائم الزاویه شکل ۱۷ داریم

$$x = R\cos\theta = R\cos\omega t$$
$$y = R\sin\theta = R\sin\omega t \Rightarrow \vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\hat{e}_x + R\sin(\omega t)\hat{e}_y$$

با مشتق‌گیری داریم

$$\vec{v} = -R\omega\sin(\omega t)\hat{e}_x + R\omega\cos(\omega t)\hat{e}_y$$
$$\vec{a} = -R\omega^2\cos\omega t\,\hat{e}_x - R\omega^2\sin\omega t\,\hat{e}_y = -\omega^2\vec{r}$$

مثال ۴- مسیر چرخزاد-

شکل (۱۸)

چرخی روی زمین صاف و افقی می‌غلتد. این چرخ با سرعت زاویه‌ای ω دور محور خودش می‌چرخد و با سرعت خطی $v = R\omega$ در راستای محور x منتقل می‌شود (شکل ۱۸). معادلات پارامتری مسیر و بردارهای سرعت و شتاب آنرا $\underbrace{\text{مسیر}}_{\text{نقطه M لبه چرخ}}$

را به دست آوریم.

با توجه به شکل (۱۸) داریم $\vec{r}(t)=\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)$ ، به طوری که

$$\vec{r}_1(t) = vt\,\hat{e}_x + R\,\hat{e}_y = R\omega t\,\hat{e}_x + R\,\hat{e}_y$$

$$\vec{r}_2(t) = R\sin(\omega t)\,\hat{e}_x + R\cos(\omega t)\,\hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = R(\omega t + \sin\omega t)\,\hat{e}_x + R(1+\cos\omega t)\,\hat{e}_y$$

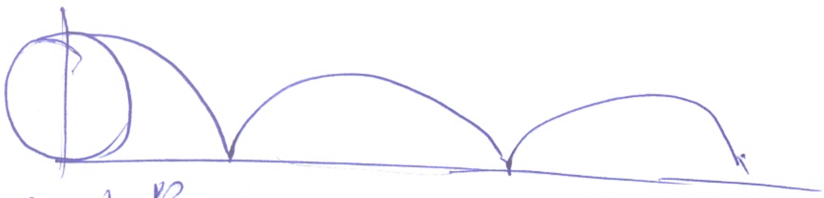
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= R(\omega t + \sin\omega t) \\ y(t) &= R(1+\cos\omega t) \end{aligned}$$

با مشتق گیری داریم

$$\vec{v} = R\omega(1+\cos\omega t)\,\hat{e}_x - R\omega\sin\omega t\,\hat{e}_y$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\sin(\omega t)\,\hat{e}_x - R\omega^2\cos(\omega t)\,\hat{e}_y$$

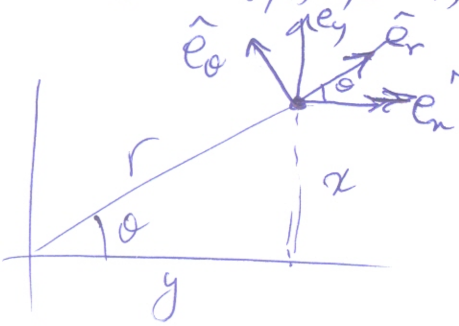
شکل مسیر مطابق شکل (۱۹) است



شکل ۱-۱۹

به این منحنی، خم چرخزاد یا سیکلوئید گفته می شود.
درس مهمی که از این مثال می توان گرفت آن است که حرکت پیچیده یک نقطه روی لبهٔ چرخ را به ترکیب دو حرکت مربوط کردیم، یکی حرکت مرکز چرخ نسبت به نقطه ثابت O و دیگری حرکت نقطه M از لبه چرخ نسبت به مرکز چرخ. این شیوه، یعنی تفکیک حرکت به بخشهای مختلف در بسیاری از مسایل کارامد است. نکته مهم دیگر آن است که شکل عبارت شتاب در این مثال با عبارت شتاب در حرکت دایره ای معمولی تقریباً یکسان است. این مطلب تاکید دیگری است بر اینکه از عبارت شتاب نمی توان حس هندسی ساده ای برای شکل مسیر داشت.

مختصات قطبی - در پاره‌ای از مسایل راحت‌تر است که به جای مختصات دکارتی x و y برای تعیین جای نقطه در صفحه از مختصات قطبی استفاده کنیم. این مختصات در شکل (۱-۲۰) نشان داده شده‌اند. مختصه r فاصله نقطه از مبدأ و مختصه θ زاویه شعاع واصل به نقطه با جهت $(+x)$ را نشان می‌دهد. مطابق شکل (۱-۲۰) داریم



شکل ۱-۲۰

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = tg^{-1}\, y/x \qquad (۱-۱۲۳)$$

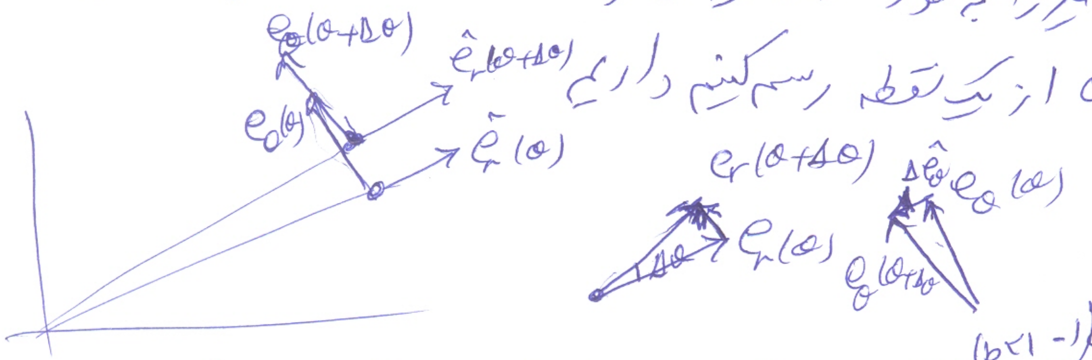
در شکل فوق همچنین بردارهای یکه جدیدی معرفی شده‌اند. بردار $\hat{e}_r$ در جهت شعاع ذره است، یعنی در جهتی که r اضافه می‌شود و θ تغییر نمی‌کند. بردار $\hat{e}_\theta$ بر $\hat{e}_r$ عمود است و در جهتی که r تغییر نمی‌کند و θ اضافه می‌شود. اندازه هر دو بردار نیز واحد است. گاه این بردارها را با $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ نیز نشان می‌دهند. چنانکه دیده می‌شود این بردارها ثابت نیستند و با تغییر جای ذره تغییر می‌کنند، برخلاف $\hat{e}_x$ و $\hat{e}_y$ که در همه جا ثابت‌اند. از شکل (۱-۲۰) می‌توان دید که

$$\hat{e}_r = (\cos\theta)\,\hat{e}_x + (\sin\theta)\,\hat{e}_y$$
$$\hat{e}_\theta = -(\sin\theta)\,\hat{e}_x + (\cos\theta)\,\hat{e}_y \qquad (۱-۱۲۴)$$

در واقع $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ توابعی از θ هستند (به r بستگی ندارند). با مشتق‌گیری از این بردارها نسبت به θ داریم

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = -(\sin\theta)e_x + \cos\theta\,\hat{e}_y = \hat{e}_\theta$$
$$\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -(\cos\theta)\hat{e}_x - (\sin\theta)\,\hat{e}_y = -\hat{e}_r \qquad (۱-۱۲۵)$$

نتایج اخیر را به طور هندسی نیز می‌توان نشان داد. اگر $\hat{e}_r$ را در زوایای θ و $\theta+\Delta\theta$ از یک نقطه رسم کنیم داریم



شکل (۱-۲۱b)

چنانکه دیده می‌شود $\Delta\hat{e}_r$ بردار کوچکی است که تقریباً به سمت e_θ اشاره دارد ~~و اندازه آن حدوداً برابر است با طول کمان~~ و $\Delta\hat{e}_\theta$ نیز مطابق شکل (۱-۲۱) بردار کوچکی است که تقریباً به سمت $-\hat{e}_r$ اشاره دارد. اندازه هر دو بردار حدوداً برابر است با کمانی از دایره به شعاع واحد که مقابل زاویه $\Delta\theta$ است یعنی $|\Delta\hat{e}_r| = |\Delta e_\theta| \simeq \Delta\theta$. اگر این تساوی را به $\Delta\theta$ تقسیم کنیم و حد $\Delta\theta\to 0$ را بگیریم خواهیم داشت

$$\left|\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\right| = \left|\frac{de_\theta}{d\theta}\right| = 1$$

این نتایج همان است که در روابط (۱-۱۲۵) بیان شده‌اند

حال می‌توانیم کمیتهای مرتبط با حرکت را در مختصات قطبی به دست آوریم. اگر از بردار مکان شروع کنیم، از شکل (۱-۲۰) می‌توان دید

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \qquad (۱-۱۲۶)$$

با استفاده از قاعده مشتق‌گیری (۱-۱۱۷) داریم

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}$$

$$= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad (۱-۱۲۷)$$

به این ترتیب $v_r=\dot{r}$ و $v_\theta=r\dot{\theta}$ مؤلفه‌های بردار سرعت در مختصات قطبی هستند. در پاره‌ای از مسایل نیاز داریم انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم m را در مختصات قطبی بیان کنیم. از رابطه (۱-۱۲۷) با توجه به متعامد بودن بردار پایه $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ داریم

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

اگر یک بار دیگر از قواعد مشتق‌گیری (۱-۱۱۶) و (۱-۱۱۷) از بردار سرعت مشتق‌گیری کنیم خواهیم داشت

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{r}\hat{e}_r+\dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt}+\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta+r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta+r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

با توجه به اینکه

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt}=\frac{de_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}=\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\dot{\theta}\hat{e}_r \qquad (۱-۱۲۸)$$

نهایتاً داریم

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta \qquad (۱-۱۲۹)$$

نتیجه (۱-۱۲۹) برای مؤلفه‌های شعاعی و سمتی بردار شتاب جالب توجه است:

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta} \qquad (۱-۱۳۰)$$

این نتایج با وجود آنکه از محاسبه ساده‌ای به دست آمده‌اند اما مستقیماً با شهود هندسی برای یک حرکت دلخواه قابل حس نیستند.

مثال - ذره‌ای روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند و زاویه θ تابع دلخواهی از زمان است. سرعت و شتاب را بیابید.

در اینجا $r=R$ و ثابت است در نتیجه $\dot{r}=0$ و $\ddot{r}=0$. از روابط ۱-۱۲۷ و

از (۱۲۹ -۱) داریم

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$
$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{e}_r + R\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta \qquad (۱۳۱ -۱)$$

به تابع $\omega(t)=\dot{\theta}(t)$ سرعت زاویه‌ای و به تابع $\alpha(t)=\ddot{\theta}(t)$ شتاب زاویه‌ای می‌گویند. در حالت خاص که سرعت زاویه‌ای ثابت است، شتاب زاویه‌ای صفر است و روابط (۱۳۱ -۱) به صورت ساده

$$\vec{v} = R\omega\hat{e}_\theta \quad , \quad \vec{a} = -R\omega^2\hat{e}_r \qquad (۱۳۲ -۱)$$

تقلیل می‌یابند که با نتایج مثال ۲، صفحه (۳۵) سازگار است. چه در حالت شتاب زاویه‌ای ثابت و چه شتاب زاویه‌ای متغیر اندازه سرعت و اندازه شتاب جانب مرکز چنین است

$$v = |v| = R\omega$$
$$|a_r| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \qquad (۱۳۳ -۱)$$

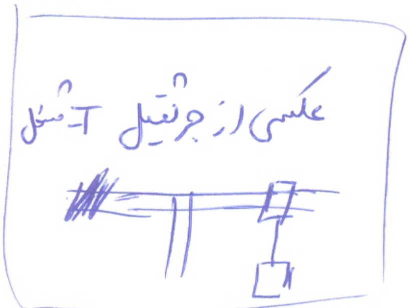
مؤلفه شعاعی شتاب همواره رو به مرکز است. مؤلفه مماسی شتاب نیز در صورت وجود شتاب زاویه‌ای به صورت $a_\theta = R\alpha$ خواهد بود.

مختصات استوانه‌ای ـ

چنانکه دیدیم در صفحه بردارهای $\vec{r}$، $\vec{v}$ و $\vec{a}$ از روابط (۱۲۰ -۱)، (۱۳۱ -۱) و (۱۳۲ -۱) بدست می‌آیند. در سه بعد همچنین می‌توانیم از مختصات استوانه‌ای که معمولاً آنها را به شکل (ρ, φ, z) نشان می‌دهیم استفاده کنیم. مختصه z همانند مختصه z دکارتی است و مختصات (ρ, φ) در واقع مختصات قطبی در صفحه xy هستند. بنابراین بدون آنکه نیاز به محاسبهٔ جدید باشد کلیه روابط بخش قبل (مختصات قطبی) را با تغییر نام‌ها از (r, θ) به (ρ, φ) و افزودن سهم مختصه z به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$$
$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,e_z \qquad (۱۳۴ -۱)$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

یک تجسم بسیار مفید از کاربرد مختصات استوانه ای جرثقیل های ساختمانی ثابت T-شکل است که به وفور در گوشه و کنار شهرها دیده می شود (شکل ۱-۲۲) با تحلیل طرز کار این جرثقیل ها به دقت توجه کنید که برای تغییر هر یک از مختصات سه گانه استوانه ای کدام بازو یا ابزار به کار می افتد و چگونه این دستگاه می تواند جسمی را از هر نقطه فضای سه بعدی به هر نقطه دلخواه دیگر جا به جا کند.

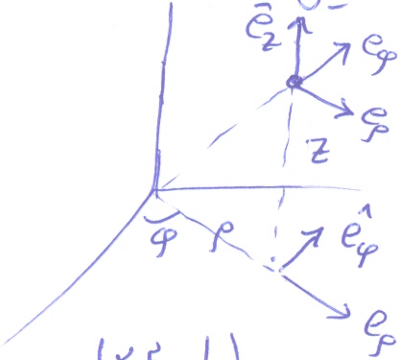


شکل ۱-۲۲

برای کاربردهای بعدی عبارت انرژی جنبشی جسمی به جرم m در مختصات استوانه ای را از رابطه دوم (۱-۱۲۴) چنین به دست می آوریم

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

همچنین لازم به توجه است که بردارهای یکه $\hat{e}_\rho$، $\hat{e}_\varphi$ و $\hat{e}_z$ سه بردار یکه متعامد مبنایی هستند که یک دستگاه مختصات راستگرد را تشکیل می دهند.



(۱-۲۲)

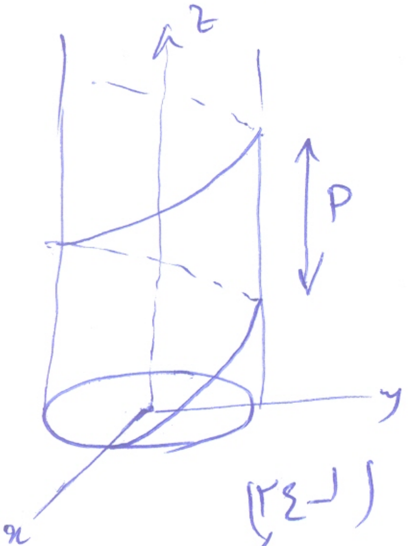
در شکل (۱-۲۲) به وضوح می توان دید که

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z$$

خواننده از همین رابطه می تواند بقیه را حدس بزند.

در واقع اگر ترتیب دوری $(\rho\varphi z)$ حفظ شود داریم $\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho$ و $\hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi$. ترتیب های برعکس نیز با یک علامت منها همراه خواهند شد.

مثال - روی بدنه استوانه ای به شعاع R که قاعده پایین آن روی صفحه $(x\text{-}y)$ است شیاری ایجاد کرده ایم که از معادلات $\rho = R$ و $z = \alpha\varphi$ تبعیت می کند (شکل ۱-۲۴). هر یک دور که مسیر دور استوانه بپیچد در امتداد z



(۱-۲۴)

به اندازه فاصله P که به آن گام پیچ می‌گوییم جابجا می‌شود.
گام پیچ و معادلات مکان، سرعت و شتاب ذره‌ای که در
این شیار حرکت می‌کند را برحسب α و R و $\varphi(t)$ پیدا کنید.

از معادله $z=\alpha\varphi$ می‌توان دید که

$$\varphi \to \varphi + 2\pi \Rightarrow z \to z + P = z + 2\pi\alpha$$

بنابراین $P=2\pi\alpha$. همچنین با استفاده از معادلات مسیر و جاگذاری آن
در روابط (۱-۱۲۴) داریم

$$\vec{r} = R\hat{e}_\rho + \alpha\varphi\hat{e}_z$$

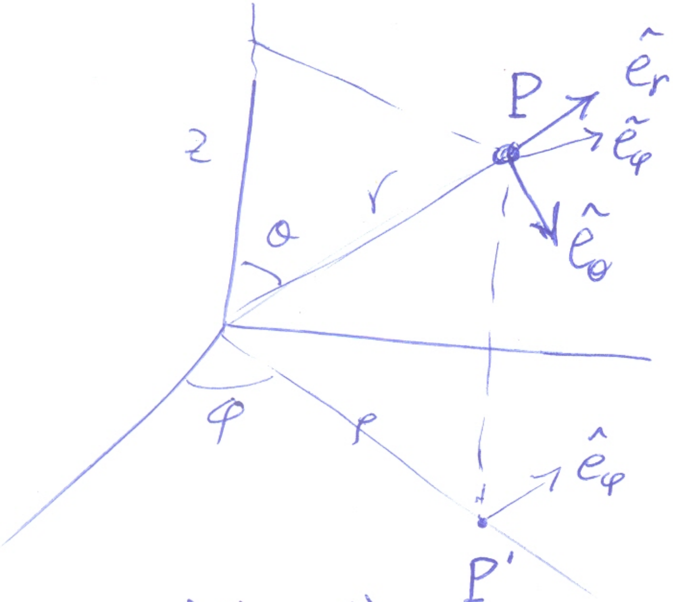
$$\vec{v} = R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \alpha\dot{\varphi}\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \alpha\ddot{\varphi}\hat{e}_z$$

دقت کنید که دامنه تغییرات φ صرفاً بازهٔ $[0,2\pi]$ نیست و نقاطی
که زاویه φ آنها 2π باهم اختلاف دارد باهم فرق دارند (مختصه z آنها
به اندازهٔ P باهم اختلاف دارد).

مختصات کروی -

برای مسائلی که تقارن کروی دارند، یعنی خواص فیزیکی در جهت‌های
مختلف یکسان است، مختصات کروی مناسب است. این مختصات که
آنها را با (r,θ,φ) نشان می‌دهیم در شکل (۱-۲۴) نمایش داده شده‌اند.
مختصه r فاصله نقطه P از مبدأ مختصات را نشان می‌دهد که همواره عدد
مثبتی است. مختصه θ زاویه شعاع واصل به آن نقطه با محور z است.
اگر نقطه P را روی صفحه xy تصویر کنیم و آن را P' بنامیم مختصه φ همان
مختصه قطبی نقطه P' در صفحه xy است و همان مختصه φ در مختصات استوانه‌ای



(۲۵-۱)

است. از نحوهٔ معرفی مختصات حدود تغییرات آنها به صورت زیر است

$< r$

$0 < \theta < \pi$

$0 < \varphi < 2\pi$

در $r=0$ (یعنی مبدا مختصات) زوایای θ و φ تعریف نشده‌اند. همچنین در امتداد $+z$ داریم $\theta=0$ و در امتداد $-z$ نیز $\theta=\pi$؛ در این دو امتداد نیز φ قابل تعریف نیست. از شکل (۲۵-۱) می‌توان دید که

$$z = r\cos\theta \quad , \quad \rho = r\sin\theta \qquad (۱۳۷-۱)$$

با توجه به اینکه (ρ و φ) مختصات قطبی در صفحه xy هستند داریم

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \qquad (۱۳۸-۱)$$

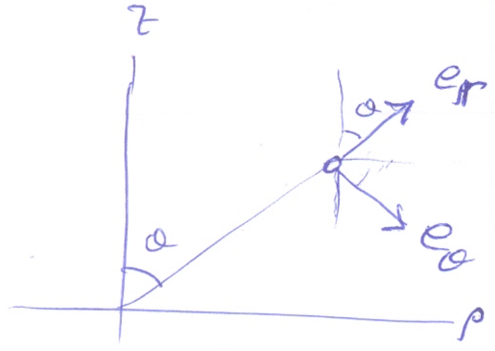
به این ترتیب بردار مکان به صورت زیر است

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y + r\cos\theta\,\hat{e}_z \qquad (۱۳۹-۱)$$

اگر مجدداً بردارهای پایه $\hat{e}_r$، $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_\varphi$ را بردارهایی در نظر بگیریم که در آن راستا مختصه مربوطه بیشترین تغییرات را دارد و دو مختصه دیگر تغییر نمی‌کند، مطابق شکل (۲۵-۱) داریم

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = (\sin\theta\cos\varphi)\hat{e}_x + (\sin\theta\sin\varphi)\hat{e}_y + (\cos\theta)\hat{e}_z \qquad (۱۴۰-۱)$$

بردارهای یکه $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ در صفحه $\hat{e}_\rho$ و $\hat{e}_z$ هستند و نسبت به این دو



(۱-۲۵)

با زاویه θ چرخیده‌اند (شکل ۱-۲۵)

بنابراین برای $\hat{e}_\theta$ داریم

$$\hat{e}_\theta = \cos\theta\,\hat{e}_\rho - \sin\theta\,\hat{e}_z \qquad (۱-۱۴۱)$$

حال اگر مثل به روابط (۱-۱۲۴) $\hat{e}_\rho$ را در صفحه xy برحسب $\hat{e}_x$ و $\hat{e}_y$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$\hat{e}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi)\,\hat{e}_x + (\cos\theta\sin\varphi)\,\hat{e}_y - (\sin\theta)\,\hat{e}_z \qquad (۱-۱۴۳)$$

سرانجام $\hat{e}_\varphi$ همان $\hat{e}_\varphi$ مختصات استوانه‌ای است و داریم

$$\hat{e}_\varphi = -(\sin\varphi)\,\hat{e}_x + (\cos\varphi)\,\hat{e}_y \qquad (۱-۱۴۴)$$

بردارهای یکه $\hat{e}_r$، $\hat{e}_\theta$ و $\hat{e}_\varphi$ یک دستگاه مختصات راستگرد تشکیل می‌دهند و داریم

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\varphi \qquad (۱-۱۴۴)$$

مجدداً خواننده می‌تواند با چرخش دوره‌ای رابطه دیگر ضرب خارجی بردارهای یکه را به دست آورد. لازم نیست دانشجو تمام این جزئیات را از برداشته باشد، اما توصیه می‌شود مهارت کشیدن شکلی مثل (۱-۲۵) و به دست آوردن جهت‌های این سه بردار که رابطه (۱-۱۴۴) را تداعی می‌کنند را کسب کند.

تمرین - با استفاده از روابط (۱-۱۴۱) تا (۱-۱۴۳) رابطه ۱-۱۴۴ را تحقیق کنید.

با مشتق‌گیری از بردار مکان (۱-۱۴۰) و توجه به اینکه مختصات همگی تابع زمان هستند می‌توان بردارهای سرعت و شتاب را به دست آورد. برای این کار به سنت ابتدا مشتق زمانی بردارهای یکه را به دست آوریم

نتیجه چنین است :

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\varphi \qquad (۱-۱۴۵)$$

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta\,\hat{e}_r + \cos\theta\,\hat{e}_\theta\right)$$

تمرین - روابط (۱-۱۴۵) را اثبات کنید.

حال با استفاده از روابط (۱-۱۴۴) و مشتق‌گیری متوالی داریم

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi \qquad (۱-۱۴۶)$$

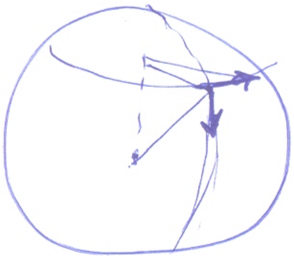
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\,\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta)\,\hat{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)\,\hat{e}_\varphi \qquad (۱-۱۴۷)$$

تمرین - رابطه (۱-۱۴۷) را به دست آورید.

مناسب است درک هندسی ساده‌ای از رابطه (۱-۱۴۶) داشته باشیم.
با توجه به تعریف سرعت ~~داریم~~ $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$، در نتیجه از رابطه (۱-۱۴۶) داریم

$$d\vec{r} = dr\,\hat{e}_r + (r\,d\theta)\,\hat{e}_\theta + (r\sin\theta)\,d\varphi\,\hat{e}_\varphi \qquad (۱-۱۴۸)$$

جمله اول در عبارت (۱-۱۴۸) یک جابه‌جایی بینهایت کوچک در راستای شعاع را می‌دهد. جمله بعدی متناظر است با جابه‌جایی روی نصف‌النهار یک کره به اندازه زاویه کوچک $d\theta$. چون شعاع این دایره r است اندازه جابه‌جایی $r\,d\theta$ و جهت آن مطابق شکل (۱-۲۷) در جهت $\hat{e}_\theta$ است.



(۱-۲۷)

سومین جمله رابطه (۱-۱۴۸) مربوط است به جابه‌جایی روی یک دایره مداری به شعاع $r\sin\theta$ به اندازه زاویه کوچک $d\varphi$ و در جهت

بگذارید که [illegible]. یادآوری می‌شود نصف النهار نیم دایره‌ای است که روی دایره عظیمه از قطب شمال به جنوب کشیده می‌شود و مدار دایره‌ای است که صفحه آن به موازات استوا کره را قطع کرده است).

برای استفاده‌های بعدی انرژی جنبشی ذره در مختصات کروی از رابطه (۱۴۶-۱) به صورت زیر است

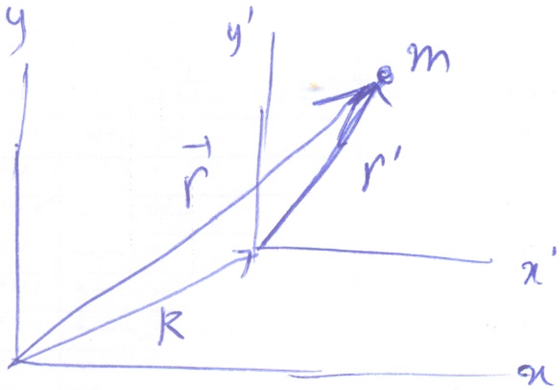
$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) \quad (۱۴۹-۱)$$

آخرین نکته‌ای که در این بخش شایان ذکر است آن است که در مکانیک برای انتخاب مختصات یک دستگاه آزادی کامل داریم. هر چند استفاده از روشهای استاندارد انتخاب مختصات که در این بخش ذکر شد به دلیل استفاده از فرمول‌ها و روابط موجود کار را آسان‌تر می‌کند، اما گهگاه ساختار مکانیکی دستگاه‌ها انتخاب‌های دیگر را موجه‌تر می‌کند. مثلاً معمول این است که در مسائلی که شتاب گرانش وجود دارد جهت $+z$ را رو به بالا، یعنی خلاف جهت شتاب گرانش بگیریم؛ اما اگر شرایط ایجاب کرد هیچ اشکالی ندارد که جهت z را رو به پایین یعنی در جهت شتاب گرانش بگیریم.

و یا مثلاً در مختصات قطبی، چنانکه دیدیم زاویه θ را زاویه چرخش شعاع متصل به نقطه در جهت مثلثاتی مثبت نسبت به جهت مثبت x ها می‌گیریم، اما مثلاً در مسئله حرکت آونگ جهت θ را می‌توان نسبت به محور قائم گرفت و این کار به مراتب بهتر است. در چنین مواردی باید نسبت به استفاده از فرمول‌های آماده، مثل برخی روابط این بخش حواسمان جمع باشد.

دستگاه‌های مختصات

چنانکه دیدیم بردار مکان ذره برداری است که از مبدأ دستگاه مختصات به ذره وصل می‌شود. اما مبدأ دستگاه مختصات اختیاری است. البته امتداد محورهای مختصات هم اختیاری است. این موضوع یعنی دوران محورهای مختصات را در فصل‌های بعد مطالعه خواهیم کرد. همان طور که



(۱ - ۲۸)

در شکل (۱ - ۲۸) می‌بینید بردار مکان ذره m نسبت به ناظر O با محورهای xy بردار $\vec{r}$ و بردار مکان آن نسبت به ناظر O' با محورهای x'y' بردار $\vec{r'}$ است. بردار $\vec{R}$ نیز مکان مبدأ دستگاه O' نسبت به O را نشان می‌دهد. با توجه به شکل داریم

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{R} \qquad (۱ - ۱۵۰)$$

گرچه در شکل (۱ - ۲۸) فقط دوتا از محورها را کشیده‌ایم، اما به راحتی می‌توان درستی رابطه (۱ - ۱۵۰) را برای حالت سه بعدی نیز تحقیق کرد. این رابطه به طور لحظه‌ای درست است. در حالت کلی جرم m در حال حرکت است و جای آن نسبت به هر دو دستگاه تغییر می‌کند، یعنی $\vec{r}$ و $\vec{r'}$ هر دو تابع t هستند. همچنین دستگاه O' نیز ممکن است نسبت به مبدأ O حرکت دلخواهی داشته باشد، یعنی $\vec{R}$ نیز تابع t است. با فرض اینکه ناظرهای مختلف زمان را یک جور اندازه می‌گیرند (این فرض در

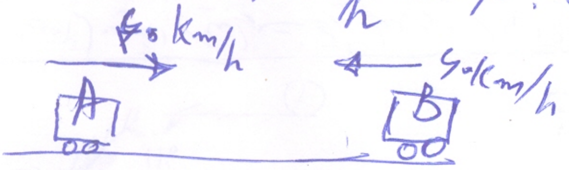
نظریه نسبیت باز نگری خواهد شد) می توانیم از طرفین رابطه (۱-۱۵۰) نسبت به زمان مشتق بگیریم و رابطه معروف جمع سرعتها را به شکل زیر به دست آوریم

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V} \qquad (۱-۱۵۱)$$

مناسب است که دانشجو این رابطه را با توجه به مفهوم نمادها به شکل زیر به خاطر بسپارد

سرعت ذره نسبت به S = سرعت ذره نسبت به S' + سرعت S' به S

در این گزاره به دقت روشن کرده ایم که هر یک از جملات سرعت چه چیز نسبت به چه چیز است. در مسایل مختلف می توان به جای S، S' و ذره عوامل موجود در مسئله را قرار داد. مثلاً وقتی می خواهیم سرعت خودرو B که نسبت به زمین با سرعت ۶۰ km/h به سمت چپ حرکت می کند را نسبت به خودرو A که نسبت به زمین با سرعت ۴۰ km/h به سمت راست حرکت می کند، به دست آوریم، چنین می نویسیم:



سرعت خودرو B نسبت به خودرو A = سرعت خودرو B نسبت به زمین + سرعت زمین نسبت به خودرو A

$$= (-۶۰\ km/h)\hat{e}_x + (-۴۰\ km/h)\, e_x$$

$$= -(100\ km/h)\,\hat{e}_x$$

که جهت $\hat{e}_x$ را به سمت راست فرض کرده ایم. در اینجا فرض می کنیم دانشجو در دروس پایه با مفهوم جمع سرعتها به اندازه کافی تمرین کرده است و از ذکر مثال های بیشتر خودداری می کنیم.

در حالت کلی ممکن است سرعت ذره نسبت به S، S' و یا هر دو متغیر باشد. همچنین ممکن است سرعت دو دستگاه نسبت به هم نیز ثابت نباشد.

اگر یک بار دیگر از طرفین رابطه (۱-۱۵۱) نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$\vec{a} = \vec{a'} + \vec{A} \qquad (۱-۱۵۲)$$

رابطه شتابها را هم می توان مشابه سرعتها با گزاره کلامی ذکر شده بعد از رابطه (۱-۱۵۱) به خاطر سپرد. در نهایت می بینیم که سرعت یا شتاب کمیت های مطلق نیستند و به انتخاب ناظری که حرکت ذره را رصد می کند بستگی دارند. همچنین لازم به دقت است که روابط (۱-۱۵۱) و (۱-۱۵۲) برداری هستند و دانشجو باید با دقت کامل نسبت به جهت بردارها از آنها استفاده کند. توصیه می شود حتی در مسایل ساده یک بعدی به جای استفاده از حس یا شهود خود از حرکت، از بردارها استفاده کنید و هرگز بدون دقت کافی عددها را باهم جمع نکنید.