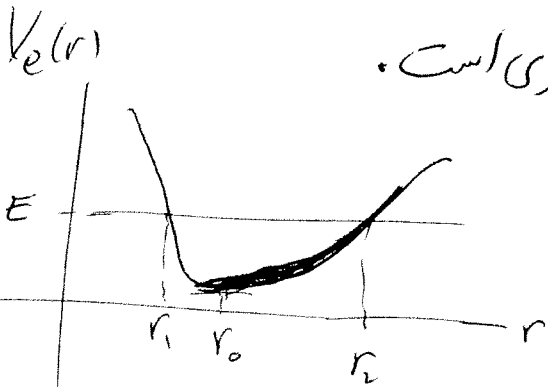


دستگاه به تعداد صحیح n_1 بار در زاویه θ چرخیده است و در همان مدت به تعداد صحیح n_2 بار نوسان شعاعی کرده است.

البته یک تفاوت مهم بین مسئله رابطه پائینتری انرژی (۵-۶۸) در نیروی مرکزی یا رابطه (۳-۵۹) در یک حرکت یک بعدی دگرزاه هست که نمایان توهم است. در حرکت یک بعدی $V(r)$ را در همه گره $(-\infty, \infty)$ می توان رسم کرد، اما در حرکت شعاعی r فقط به مقدار مثبت محدود است. بنابراین کافی است پتانسیل مؤثر فقط در ناحیه $r > 0$ رسم شود. اگر $r=0$ جزو محدوده حرکت باشد، معنی آن این است که این نقطه یک نقطه بازگشت محسوب است. یعنی زره تا شعاع $r=0$ حرکت می کند و مجدداً از آن نقطه دور می شود. اگر عبارت $V_e(r)$ در $r=0$ به طور طبیعی دوباره ملذدی نداشته باشد، باید یک دوباره فرضی به ارتفاع نامتناهی در $r=0$ در نظر گرفت که از عبور زره به ناحیه $r < 0$ جلوگیری کند. به عنوان مثال اگر $V_e(r) = \frac{1}{3} r^3$ باشد به طوری که انرژی پتانسیل مؤثر در $r=0$ به $(-\infty)$ میل

کند، چنین دوباره فرضی ضروری است.



اگر E نقطه گتیه پتانسیل مؤثر باشد، به ازای $E = V_e(r_0)$ حرکت شعاعی به صورت سگون در شعاع $r=0$ است و ~~در~~ این حالت جمله $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$ متغیر با ~~صراحت~~ به شکل $(\dot{r})^2$ در ~~گتیه~~ اما چون در اصل حرکت

شکل ۵-۸ - (مطلب صفحه قبلی)
یک منحنی نوعی از پتانسیل مؤثر و نقاط بازگشت شعاعی r_1 و r_2

دو بعدی است، سکون در مختصه شعاعی به معنی سکون ذره نیست. ذره در مختصه زاویه ای حرکت دارد. به بیان دیگر، در این حالت حرکت در دایره ای به شعاع ρ است و سرعت زاویه ای آن با توجه به رابطه (۴۵-۵)

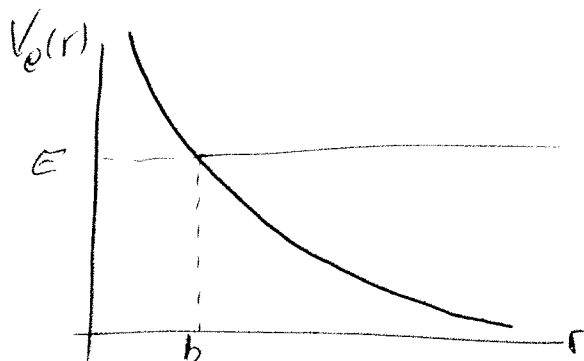
صدا، ثابت زیر است:

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{\dot{\rho}}{r_0^2} \quad (49-5)$$

اگر انرژی ذره اندکی از $V_e(r_0)$ بیشتر باشد، شاهد نوسان شعاعی کم دامنه حول حرکت دایره ای خواهیم بود. بسیار زاویه ای حرکت نوسانی شعاعی در این حالت (در مسابقت با بسیار نوسانهای کوچک در حرکت یک بعدی)؛ رابطه (۳۰-۷۱) به صورت زیر است.

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 V_e}{dr^2} \right|_{r=r_0}} \quad (50-5)$$

مثال ۱- دستگاه دو جسمی بدون برهم کنش
اگر نیروی برهم کنش بین دو جسم صفر باشد ~~و~~ انرژی پتانسیل $V(r)$ را می توان ثابت در نظر گرفت. چون مقدار این ثابت نقشی در دینامیک مسئله ندارد عملاً می توان آن را صفر گرفت. به این ترتیب انرژی پتانسیل مؤثر فقط شامل جمله گریز از مرکز $\frac{\rho^2}{2mr^2}$ است. نمودار $V_e(r)$ بر حسب r مطابق شکل (۵-۱۰)



است. ~~و~~ رابطه پاستی

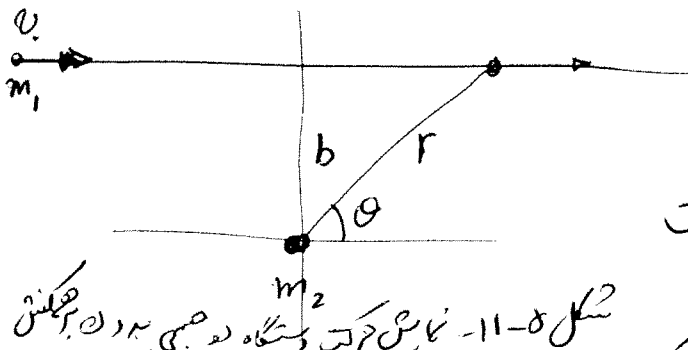
انرژی در این حالت به صورت زیر است

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\rho^2}{2mr^2} = E \quad (51-5)$$

روشن است که در این حالت E فقط می تواند

شکل ۵-۱۰- انرژی پتانسیل مؤثر برای دستگاه دو جسمی بدون برهم کنش

مقادیر مثبت را اختیار کند. مطابق شکل (۵-۱۰) از تقاطع خط (تقاطع E_2) با محور (r) تنها یک نقطه بازگشت در $r=b$ به دست می آید. حرکت



مطابق شکل (۵-۱۱) است. ذره m_1

با سرعت ثابت v_0 از کنار ذره m_2 عبور

می کند. کمترین فاصله در دوره از یکدیگر b است

که همان نقطه بازگشت شعاعی است که در

شکل (۵-۱۰) نیز نشان داده شده است. اندازه حرکت زاویه ای نسبی دستگاه

مطابق شکل ۵-۱۱ عبارت است از

$$l = \mu r_{\perp} v_0 = \mu b v_0 \quad (5-52)$$

که در آن از رابطه گانه زاویه ای به شکل (۳-۱۲۱) استفاده کرده ایم. انرژی

کل دستگاه نیز فقط شامل انرژی جنبشی حرکت نسبی است

$$E = \frac{1}{2} \mu v_0^2 \quad (5-53)$$

با استفاده از روابط (۵-۵۲) و (۵-۵۳) می توان دید که رابطه $E = \frac{l^2}{2\mu r^2}$ تنها

به جواب $r=b$ منجر می شود.

مثال ۲- نیروی شعاعی فتری

فرض کنید که ذره با نیروی به صورت $\vec{F} = -kr\hat{e}_r$ با یکدیگر برهم کنش

دارند. این نیرو از یک نیروی آسان با طول آزاد صفر و ضریب k ناشی

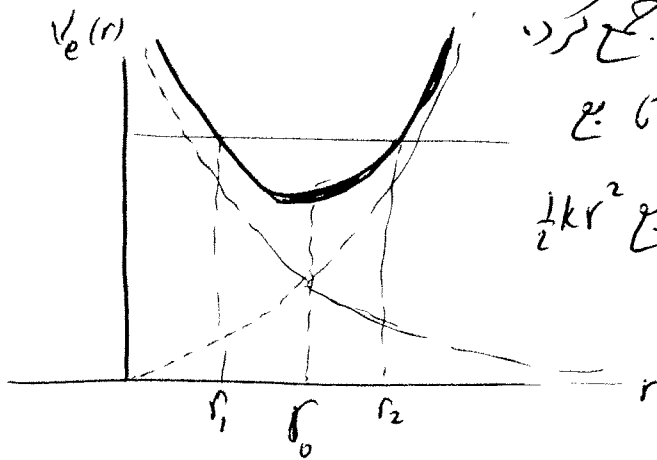
می شود که در جسم m_1 و m_2 در دوسر آن قرار گرفته اند. انرژی پتانسیل

برهم کنش $V(r) = \frac{1}{2} kr^2$ است (فرض آنکه در حالت $r=0$ انرژی پتانسیل

صفر فرض شود) و انرژی پتانسیل مرکز دستگاه چنین است

$$V_e(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{\rho^2}{2\mu r^2} \quad (54-5)$$

برای رسم نمودار $V_e(r)$ بر حسب r می توان در تابع $\frac{1}{2}kr^2$ و $\frac{\rho^2}{2\mu r^2}$ را مطابق شکل



(5-12) برای گانه رسم و آنها را با هم جمع کرد

مختی حاصل در r های کوچک به نمودار تابع

$\frac{\rho^2}{2\mu r^2}$ و در r های بزرگ به نمودار تابع $\frac{1}{2}kr^2$

مماثل است. کمینه $V_e(r)$ را می توان

از رابطه $\frac{dV_e}{dr} = 0$ به دست

آورد که نتیجه آن چنین است

شکل 5-12 - نمودار انرژی پتانسیل مؤثر برای
برهنگش شعاعی فتری

$$r_0 = \left(\frac{\rho^2}{\mu k}\right)^{1/4} \quad (55-5)$$

به ازای $E = V_e(r_0) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{k}{\mu}}\rho$ زره حرکت شعاعی ندارد و در مدار دایره ای به

شعاع r_0 می چرخد. هر حرکت دیگر دستگاه با انرژی $E > V_e(r_0)$ به

یک یا زده متناهی از شعاعها به صورت $r_1 < r < r_2$ محدود و مقید است.

برای نوسانات کوچک شعاعی مطابق رابطه (50-5) داریم

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \left(\frac{-3\rho^2}{\mu r^4} + k \right) \Big|_{r=r_0} = \frac{4k}{\mu} \quad (56-5)$$

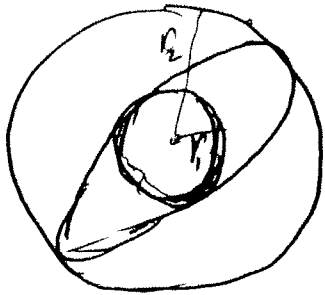
از طرفی بسامد چرخش دستگاه در حرکت دایره ای نیز از رابطه (5-49)

$$\omega = \frac{\rho}{\mu r_0^2} = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (55-5) \text{ برابر است با } (57-5)$$

به این ترتیب $\omega_p = 2\omega$ یعنی در هر دور چرخش دستگاه در نوسان

شعاعی وارد یعنی لااقل در نوسانات کم دامنه شعاعی مسیر دستگاه بسته

است. محاسبه دقیق تر نشان می دهد که در حالت کلی نیز مسیر به صورت یک بیضی است که مکان شکل (۵-۱۴) بین دو دایره به شعاعهای r_1 و r_2 محاط شده است. مبدأ مختصات در این حرکت مرکز بیضی است.



شکل ۵-۱۴ - مسیر حرکت ذرات در اثر برهم کنش شعاعی فوری

در بخش (۳-۶) دیدیم که از رابطه پاستیگی

انرژی (۳-۵۹) می توان به رابطه (۳-۵۱)

برای $\frac{dr}{dt}$ یک معادله ذره

رسید که یک رابطه انتگرالی برای محاسبه $\chi(t)$ است

در این نیز می توان ابتدا از رابطه پاستیگی انرژی

(۵-۴۸) سرعت شعاعی را به صورت زیر به دست آورد

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_e(r))} \quad (5-48)$$

که از آن می توان به رابطه انتگرالی زیر رسید

$$\pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_e(r))}} = \int dt \quad (5-49)$$

اگر انتگرال گیری را به محدود زمانی که در آن $\frac{dr}{dt}$ مثبت است محدود

کنیم از علامت (+) در رابطه (۵-۴۹) استفاده کنیم و در غیر این صورت

از علامت (-) تابع استفاده کرد. رابطه (۵-۴۹) با اعمال شرایط اولیه

مناسب علی الاصول $r(t)$ را به ما خواهد داد. سپس با استفاده از

رابطه (۵-۴۵) می توان نوشت

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2(t)} \quad (5-50)$$

با انتگرال گیری زمانی از رابطه (۵-۵۰) علی الاصول می توان $\theta(t)$ را نیز به دست آورد

اگر روابط (۵-۵۸) و (۵-۶۰) را بر یکدیگر تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{l}{\mu r^2} \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_e(r))} \quad (5-61)$$

که آن را می توان به شکل انتگرالی زیر آورد.

$$\int d\theta = \pm \int \frac{\frac{l}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_e(r))}} \quad (5-62)$$

برای یک مسئله مشخص بتوان انتگرال سمت راست معادله (۵-۶۲) را حساب کرد و θ به عنوان تابعی از r به دست می آید که با معکوس کردن آن می توان (۵) را حساب کرد. این رابطه هر چند اطلاعات کمتری از مجموع اطلاعات ناشی از ترمابع (۱) و (۲) در بردارد اما در عوض شکل مسیر حرکت را در مختصات قطبی به ما خواهد داد. در بخش بعد ما این کار را برای نیروی مرکزی معکوس مجزوری انجام خواهیم داد.

به این ترتیب با استفاده از روابط پایداری (۵-۴۶) و (۵-۳۳) یک روش کلی برای حل معادلات حرکت برای هر نیروی مرکزی دلخواه وجود دارد. به عنوان در مثال خاص می‌توان این روش را برای دو مثال یاد شده در این بخش به کار برد.

حال برگردیم به معادلات حرکت (۵-۴۴) که صورت بندی نیوتنی مسئله نیروی مرکزی را ارائه کرده‌اند. همان‌طور که دیدیم معادله درم از دستگاه معادلات (۵-۴۴) در واقع بیانگر همان پایداری مکانی زاویه‌ای هستند. مجدداً می‌توانیم از این رابطه پایداری سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای L را مکانی رابطه (۵-۴۵) به صورت $\frac{L^2}{\mu r^2}$ در نظر بگیریم و آن را در معادله اول (۵-۴۴) یعنی معادله حرکت شعاعی قرار دهیم. نتیجه چنین است

$$\mu \ddot{r} = \frac{L^2}{\mu r^3} + F(r) \quad (۵-۶۳)$$

این رابطه مشابه معادله حرکت یک تک ذره به جرم μ است که تحت اثر نیروی $F(r)$ معکوس نیروی $\frac{L^2}{\mu r^3}$ قرار گرفته است که اصطلاحاً به آن نیروی گریز از مرکز می‌گوئیم. برای حل این مسئله می‌توان از تمام فنون مربوط به حرکت تک ذره که در بخش‌های قبل یاد گرفتیم استفاده کنیم؛ فقط حل معادلات باید نهایتاً حواسمان باشد که دامنه حرکت به r های مثبت محدود است. شکل خاص نیروی گریز از مرکز در رابطه (۵-۶۳) در کنار رابطه پایداری مکانی زاویه‌ای به ما این امکان را می‌دهد که معادله فوق را به شکل مناسب‌تری در آوریم که برای حل بسیاری از مسائل با نیروی مرکزی

مناسب تر است. برای این کار، ~~معمولاً~~ متغیر جدید u را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \quad (5-46)$$

با مستقاری نسبت به θ از این رابطه خواصیم درست

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \dot{r}$$

که با استفاده از رابطه $\dot{r} = \frac{l}{\mu r^2} \dot{\theta}$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{l} \dot{r} \quad (5-45)$$

مستقاری مجدد نسبت به θ با استفاده مجدد از رابطه $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$ می‌دهد

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{l} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{\mu}{l} \frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{\mu^2}{l^2} r^2 \ddot{r}$$

با استفاده از ~~رابطه~~ ^{تدریس} (5-46) نتیجه افیر برای توان به شکل زیر بیان کرد

$$\ddot{r} = -\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (5-46)$$

اگر ~~تو~~ از رابطه افیر در معادله حرکت شعاعی (5-43) جایگزاری کنیم

به دست می‌آید

~~$$-\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{l^2}{\mu^2} \frac{F(r)}{u^2}$$~~

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{F(u)}{u^2}$$

~~$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2} \frac{F(u)}{u^2}$$~~

(5-47)

که در آن $F(u)$ همان $F(r)$ است که بر حسب $u = \frac{1}{r}$ بیان شده است.

این رابطه به شکل یک معادله دیفرانسیل نسبتاً ساده برای یافتن $u(\theta)$ است.

کتاب استاده

اگر هم برعکس $u(\theta)$ و به تبع آن $u(\theta)$ را داشته باشیم می توانیم $F(r)$ را حساب کنیم

مثال - تانگ نیرو برای مدار مارپیچ

فرض کنید تحت نیروی مرکزی خاصی ذره در مسیر مارپیچی با معادله $u(\theta) = r_0 e^{\alpha\theta}$ حرکت می کند که α و r_0 کمتهای ثابتی هستند. میخواهیم شکلی نیروی مرکزی را که منجر به این حرکت می شود بیابیم و متغیرهای دینامیکی H و L را حساب کنیم.
برای $u(\theta)$ داریم $u(\theta) = \frac{1}{r_0} e^{\alpha\theta}$ که با دو بار مشتق گیری از آن

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{\alpha^2}{r_0} e^{-\alpha\theta} = \frac{\alpha^2}{r} \quad (68-5)$$

به دست می آید با قرار دادن این نتیجه در رابطه (67-5) خواهیم داشت

$$\frac{\alpha^2}{r} + \frac{1}{r} = -\frac{\mu}{\rho^2} r^2 F(r)$$

$$F(r) = -\frac{\rho^2(\alpha+1)}{\mu} \frac{1}{r^3} \quad (69-5)$$

به این ترتیب یک نیروی جاذبه ای متناسب با عکس توان سوم حاصل می تواند چنین حرکتی را ایجاد کند. برای تعیین H از رابطه $\theta = \frac{\rho}{\mu r^2}$ داریم

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\rho}{\mu r^2} e^{-2\alpha\theta}$$

که می توان آن را به صورت زیر در آورد

$$\int e^{2\alpha\theta} d\theta = \frac{\rho}{\mu r_0^2} \int dt$$

$$e^{2\alpha\theta} = \frac{2\alpha\rho}{\mu r_0^2} t + C \quad (70-5)$$

که نتیجه می دهد ~~حل~~ به صورت زیر است
معادله افتر

$$\theta(t) = \frac{1}{2\alpha} \ln \left[\frac{2\alpha l}{\mu r^2} t + c \right] \quad (71-5)$$

اگر کمترین رابطه (70-5) را در r_0^2 ضرب کنیم سمت چپ $r^2(t)$ خواهد بود که با جذرگیری نتیجه می‌دهد

$$r(t) = \left[\frac{2\alpha l}{\mu} t + c \right]^{1/2} \quad (72-5)$$

5-4- نیروی مرکزی عکس مجذوری - مسئله کپلر

در این بخش به سراغ یکی از نیروهای مرکزی بسیار مهم یعنی نیروی مناسب با

$\frac{1}{r^2}$ می‌رویم. در حالت جاذبه $F(r) = -\frac{C}{r}$ و در حالت دفعه $F(r) = \frac{C'}{r^2}$

که C و C' ثابت‌های مثبتی هستند. برای گرانش نیوتنی $C = G M_1 m_2$

~~و~~ و برای نیروی کولمبی در بار هم نام $C' = \frac{9 \cdot 10^9}{4\pi\epsilon_0}$

نخست نیروی جاذبه عکس مجذوری را بررسی می‌کنیم و در پایان به سراغ نیروی دفعه نیز خواهیم رفت.

برای $F(r) = -\frac{C}{r^2}$ انرژی پتانسیل گرانشی به صورت $V(r) = -\frac{C}{r}$

و انرژی پتانسیل موثر به صورت زیر است

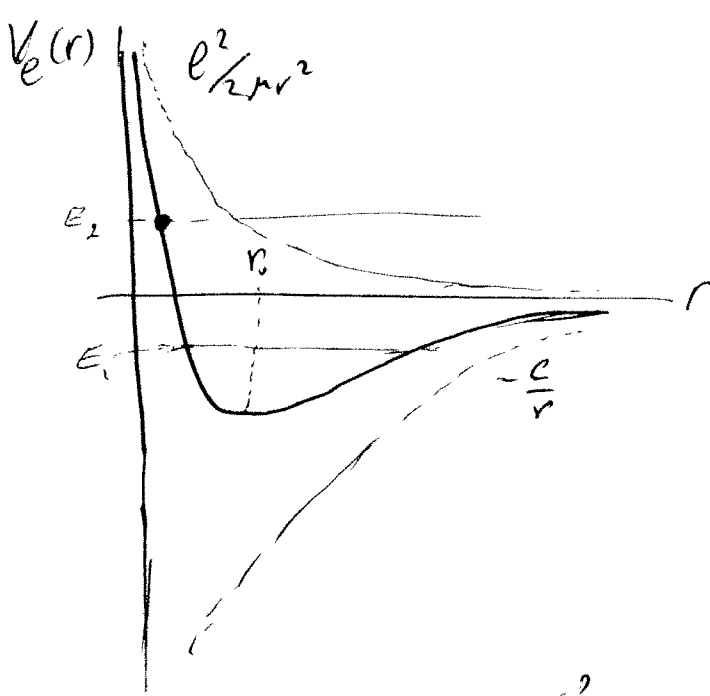
$$V_e(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{C}{r} \quad (74-5)$$

برای رسم نمودار $V_e(r)$ بر حسب r در اینجایی که دو تابع $\frac{l^2}{2\mu r^2}$ و $-\frac{C}{r}$ را

جداگانه رسم می‌کنیم و سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم. حاصل کار، مطابق شکل

(5-14) است. توجه کنید که در r های کوچک $\frac{l^2}{2\mu r^2} \rightarrow \infty$ و $-\frac{C}{r} \rightarrow -\infty$

تغییر با تغییر گریز از مرکز است. در ψ های
 بزرگ نیز هر دو تابع به هم نزدیک می‌گردد،
 اما تغییر گریز از مرکز زودتر صفر
 می‌شود. به این ترتیب نمودار $V_e(r)$ ψ
 از مقادیر بزرگ مثبت در ψ های
 کوچک شروع می‌شود و پس از قطع
 کردن محور $\psi = 0$ مقدار منفی
 خواهد داشت. چون نهایتاً باید
 این نمودار در ψ های بزرگ



شکل ۵-۱۴ - انرژی پتانسیل مؤثر
 برای نیروی عکس جاذبه‌ای

در ψ های که زیر محور $\psi = 0$ قرار دارد

به طور محلی به هم نزدیک می‌گردد و چاره‌ای ندارد جز آنکه به یک کمینه مقدار
 در $\psi = 0$ برسد و پس مجدداً تا مقدار صفر به طور محلی افزایش

یابد.
 برای یافتن شعاع r_0 (شعاع کمینه مقدار V_e) که متناظر با حرکت

دایره‌ای است داریم

$$\left. \frac{dV_e}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow -\frac{l^2}{\mu r_0^3} + \frac{C}{r_0^2} = 0$$

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu C}$$

که نتیجه می‌دهد

(۵-۷۴)

گفت $r_0 = \frac{l^2}{\mu C}$ به صورت‌های مختلف در محاسبات ظاهری شود و اهمیت
 ویژه‌ای دارد. بنام زاویه‌ای حرکت دایره‌ای نیز از رابطه $r_0 = \frac{l^2}{\mu C}$
 برای تعیین

فرض $\rho = \mu v^2$ داریم و در نتیجه از رابطه (۵-۷۴) به دست می آید

$$\rho = \mu v^2 = \frac{c}{v} \quad (5-75)$$

که نشان می دهد هر چه شعاع حرکت دایره ای بزرگتر باشد بسیار آهسته ای آن که حرکت است. این رابطه حالت خاصی از رابطه کلی تری (رابطه ۵-۱۱۵) است که در ادامه این فصل به آن خواهیم رسید و در مورد اهمیت آن بحث خواهیم کرد.

اگر مطابق شکل (۵-۱۴) انرژی به میزان $E_1 < E_0$ باشد، در نقطه بازگشت شعاعی خواهیم داشت و ذره بین دو شعاع گسیخته و بیشینه محدود و محصور است.

نشان خواهیم داد که مسیر حرکت در این حالت یک بیضی است. اگر انرژی به مقدار $E_2 > E_0$ باشد، مطابق شکل (۵-۱۴) مسیر ذره باز است، یعنی ذره

می تواند از فواصل بسیار دور به سمت نزدیک شود و بعد از رسیدن به یک شعاع گسیخته (نقطه بازگشت شعاعی) مجدداً به فواصل بسیار دور برود. نشان

خواهیم داد که در این حالت مسیر حرکت یک بیضی است. در این وضعیت حالت خاص $E = E_0$ نیز در میان این دو حالت است. در این وضعیت

مدار ذره باز است و شکل مسیر یک سهمی خواهد بود. اشکال سه گانه بعضی، سهمی و هذلولی مقاطع مخروطی نام دارند که از دایره باز توسط ریاضی دانان شناخته شده بودند.

نکته به حالتی بپردازیم که $E < E_0$ و مدار بیضی است. برای یافتن

مسیر از معادله انرژی (۵-۶۲) کمک می گیریم که در آن $v(r)$ از

رابطه (۵-۷۴) قرار داده می شود. نتیجه ~~اشکال سه گانه~~ زیر است:

$$\int d\theta = \pm \int \frac{\frac{\rho}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E + \frac{c}{r} - \frac{\rho^2}{2\mu r^2} \right)}} \quad (76-5)$$

فرض کنیم انتگرال در بازه‌ای گرفته شود که علامت (+) صحیح باشد. با تغییر متغیر $u = \frac{1}{r}$ انتگرال (76-5) به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \int \frac{-du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2\mu c}{\rho^2} u + \frac{2\mu E}{\rho^2}}} \\ &= \int \frac{-du}{\sqrt{-(u - \frac{\mu c}{\rho^2})^2 + (\frac{\mu c}{\rho^2})^2 (1 + \frac{2E\rho^2}{\mu c^2)}}} \quad (77-5) \end{aligned}$$

با نامگذاری $r_0 = \frac{\rho^2}{\mu c}$ (رابطه 74-5) و نیز

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\rho^2}{\mu c^2}} \quad (78-5)$$

رابطه (77-5) به صورت زیر درمی آید

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{-du}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{r_0^2} - (u - \frac{1}{r_0})^2}}$$

که انتگرال ساده‌ای است، جواب آن به صورت زیر است

$$\theta - \theta_0 = \cos^{-1} \left[\frac{r_0}{\epsilon} \left(u - \frac{1}{r_0} \right) \right] \quad \text{---}$$

با جای‌سب کسینوس در طرف رابط ~~رابطه~~ ~~(78-5)~~ داریم

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (79-5)$$

نهایت θ در عبارات فوق در واقع نهایت انتگرال گیری در معادله (75-5) است

واهمیت ویژه‌ای ندارد. زاویه $\theta = 50^\circ$ هابی است که r کمینه مقدار خود را دارد. بدون نقص کلیت مسئله می‌توان آن را 17 گرفت. در این صورت

نتیجه (۵-۷۹) به صورت استاندارد زیر درمی‌آید

$$r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta} \quad (5-80)$$

کمیت بدون بعد ϵ دارای اهمیت ویژه‌ای است و خروج از مرکز ϵ نام دارد. ^{باتوجه به رابطه (۵-۷۸)} $\epsilon < 0$ که نعلی مورد بحث ماست $\epsilon < 1$. رابطه (۵-۸۰) معادل

عمومی مقاطع مخروطی در مختصات قطبی است. محاسبه‌ای که به رابطه (۵-۸۰) منتهی شد عیناً برای حالت $\epsilon < 0$ نیز قابل تکرار است. در چنین حالتی $\epsilon < 0$ که مستقیم مدار هذلولی است. حالت $\epsilon = 0$ با $\epsilon = 1$ معادل است که مستقیم مدار سهمی است. به ازای $E = -\frac{Mc^2}{2a^2}$ خروج از مرکز صفر می‌شود

و مدار دایره‌است. این مدار انرژی در واقع $(r_0) \frac{1}{2}$ است.

برای حالت $\epsilon < 1$ از کمین وسطین کردن رابطه (۵-۸۰) داریم

$$r - \epsilon r \cos \theta = r_0 \quad (5-81)$$

در مختصات دکارتی $x = r \cos \theta$ و رابطه (۵-۸۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r_0 + \epsilon x \quad (5-82)$$

با به توان دو رساندن هر طرف این رابطه و مرتب‌سازی رابطه (۵-۸۳) نتیجه

$$(1 - \epsilon^2)x^2 - 2\epsilon r_0 x + y^2 = r_0^2 \quad (5-83)$$

با اضافه و کم کردن عبارتی ثابت می‌توان جمله x را به صورت مربع

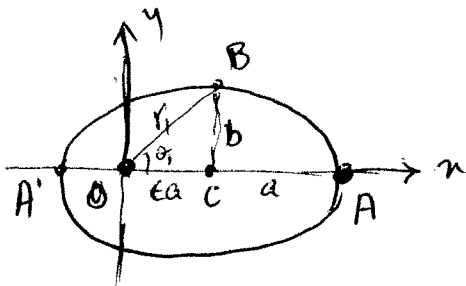
کامل در آوردن نتیجه نهایی به صورت زیر است

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5-14)$$

که در آن

$$a = \frac{r_0}{1-\epsilon^2} \quad \text{و} \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \quad \text{و} \quad x_0 = \epsilon a \quad (5-15)$$

اگر مبدأ مختصات با به نقطه $(\epsilon x_0, 0)$ منتقل کنیم رابطه (5-14) نرم
استاندارد معادله بیضی به مرکز نقطه زکمر شده را دارد که در آن a نیم قطر
بزرگتر و b نیم قطر کوچکتر است. (شکل 5-15)



شکل 5-15 - شکل بیضی
معادله (5-14)

حال برگردیم به مختصات قطبی و سعی
کنیم برای حالت $\epsilon < 1$ خواص مسیری که
با معادله حرکت (5-10) توصیف می شود
را به دست آوریم. وجود تابع دوره ای

θ در معادله (5-10) حاکی از آن است

که بعد از هر دور چرخش، یعنی بعد از آن که 2π به زاویه θ اضافه ~~شود~~
شعاع r برای هر زاویه θ همان مقدار قطبی خواهد شد. این یعنی
آنکه منحنی مسیر حرکت بسته است. ضمناً توجه داریم که برای $\epsilon < 1$
گهزه مقادیر θ بین صفر و 2π در معادله (5-10) مجاز هستند. کمترین
مقدار r به ازای $\theta = \pi$ و بیشترین مقدار را آن به ازای $\theta = 0$ است

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1+\epsilon} \quad r_{\max} = \frac{r_0}{1-\epsilon} \quad (5-16)$$

این نقاط در شکل (5-15) به ترتیب با A' و A نشان داده شده اند.

فاصله $AA' = 2a$ طول قطر بزرگتر بیضی است که به صورت زیر است

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2r_0}{1-\epsilon^2} \quad (۱۷-۵)$$

اگر نقطه C را وسط قطر AA' بگیریم و آن را مرکز بیضی بنامیم، فاصله

OC = x_0 چنان است

$$x_0 = r_{\max} - a = \frac{r_0}{1-\epsilon} - \frac{r_0}{1-\epsilon^2} = \frac{\epsilon r_0}{1-\epsilon^2} \quad (۱۸-۵)$$

مبدأ مختصات O در واقع کانون بیضی نام دارد. رابطه (۱۸-۵)

$$\epsilon = \frac{x_0}{a} \quad \text{نشان می دهد که} \quad (۱۹-۵)$$

این کمیت همان خروج از مرکز بیضی را نشان می دهد که نشان می دهد فاصله کانون و مرکز چه نسبتی از نیم قطر بزرگتر بیضی است. هر چه ϵ کوچکتر باشد شکل به دایره نزدیک تر است و هر چه ϵ به یک نزدیک تر شود بیضی حالت کشیده تری خواهد داشت.

حال سعی می کنیم طول نیم قطر کوچکتر بیضی را به دست آوریم. فرض کنیم از نقطه C در وسط AA' عمود بر آن رسم کنیم تا بیضی را در نقطه B قطع کند. مختصات قطبی نقطه B را (r_1, θ_1) می نامیم. از معادله بیضی (رابطه ۵-۱۰)

$$r_1 - \epsilon r_1 \cos \theta_1 = r_0 \quad (۲۰-۵) \quad \text{داریم}$$

با توجه به شکل (۵-۱۵) داریم

$$r_1 \cos \theta_1 = x_0 = \epsilon a \quad (۲۱-۵)$$

که در آن از رابطه (۵-۱۹) نیز استفاده کرده ایم. رابطه (۲۰-۵) با استناد

از (۵-۲۱) و (۵-۱۷) نتیجه می دهیم

$$r_1 = \epsilon^2 a + r_0 = \epsilon^2 a + (1-\epsilon^2)a = a \quad (۲۲-۵)$$

حال در مثلث OCB از شکل (۵-۱۵) طول ضلع BC چنین خواهد شد

$$b = \sqrt{r_1^2 - e^2 a^2} = \frac{\sqrt{1 - e^2} r_0}{1 - e^2} = \frac{r_0}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (۵-۹۳)$$

که در آن از معادله (۵-۸۷) نیز استفاده کرده ایم. در عین حال لازم است نشان دهیم که نقطه B واقعاً در انتهای قطر کوچک واقع است. برای این کار مؤلفه رگاری y تقاطع روی بیضی را به عنوان تابعی از

$$y(\theta) = r \sin \theta = \frac{r_0 \sin \theta}{1 - e \cos \theta} \quad (۵-۹۲)$$

اگر در این رابطه نسبت به θ مشتق بگیریم و آن را مساوی صفر بگیریم

جواب به رابطه $e \sin \theta = e$ منجر می شود. با توجه به نتیجه (۵-۹۲)

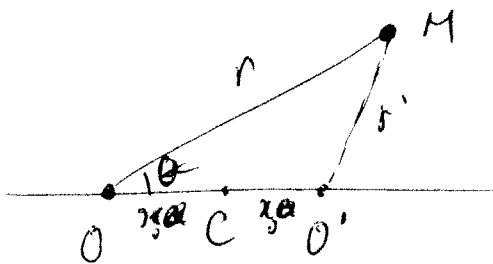
می توان دید که در مثلث OCB از شکل (۵-۱۵) داریم $e \sin \theta = e$.

بنابراین نقطه B واقعاً جایی است که محضه y بیشینه مقدار خود را دارد یعنی در انتهای قطر کوچک یعنی.

حال می خواهیم نشان دهیم ~~مقدار~~ معادله قطبی (۵-۸۰) مکان هندسی

تقاطعی از صفحه را نشان می دهد که مجموع فواصل نشان از دو نقطه ثابت است و

به این منظور شکل ساده شده ای از شکل (۵-۱۵) را در شکل (۵-۱۶)



نشان داده ایم. در این شکل نقطه O

قرینه مبدأ محققات O نسبت به مرکز

بیضی یعنی نقطه C است. تقاطع

O, O' کانترهای بیضی نامیده می شوند.

شکل (۵-۱۶) نمایش فاصله نقطه M
روی بیضی از کانترهای O, O'

فاصله نقطه M روی بیض از کانون O همان محضه شعاعی a است و فاصله آن از ~~کانون~~ ^{از رابطه} O طول r' است که ~~برابر~~ ^{تقریباً} دست می آید

$$r'^2 = r^2 + (2x_0)^2 - 4x_0 r_0 \quad (95-5)$$

که در آن از قانون کسینوس ها در مثل OMO استفاده شده است.

با استفاده از معادله بیضی (رابطه 5-10) داریم

$$r_0 = \frac{r-r_0}{e}$$

با قرار دادن آن در معادله (5-95) و نیز رابطه (5-11) برای r_0

دوین از مرتبه کردن نتیجه حاصل چنین است

$$r'^2 = \left(r - \frac{2ar_0}{1-e^2} \right)^2 \quad (96-5)$$

پس از جذرگیری داریم

$$r' = \pm \left(r - \frac{2ar_0}{1-e^2} \right) \quad (97-5)$$

عبارت $\frac{2ar_0}{1-e^2}$ همان $2a$ یعنی طول قطر بزرگتر بیضی است. بنا بر این

برای آنکه نتیجه جذرگیری برای r' طول r' مثبت باشد نقطه می توان علامت (-) را در رابطه (5-97) انتخاب کرد. به این ترتیب داریم

$$r+r' = 2a \quad (98-5)$$

یعنی جمع فواصل هر نقطه دگوا M روی بیضی از کانون های O و O' برابر طول قطر $2a$ برآید بیضی است.

نتایج این بخش تا اینجا نشان می دهد که تحت تأثیر جاذبه گرانشی

خورشید حرکت از سیارات روی مدار بیضی شکل حرکت می کند که خورشید

در کاژون آن واقع شده است. این نتیجه با چشم پرسی از نیروی گرانشی سایر سیارات و قمرهای موجود در منظومه شمسی روی یک سیاره معین حاصل شده است. به همین جهت ثابت C در رابطه نیروی عکس مجذوری

برابر است با GmM که m جرم سیاره

$$C = GmM \quad (99-5)$$

که m جرم سیاره، M جرم خورشید و G ثابت گرانش نیوتن است. از رابطه (8-17) می توان طول قطر بزرگتر مدار سیاره را بر حسب رابطه

حرکت ~~در مدار~~ به دست آورد. با توجه به تعریف a و C از

$$2a = \frac{2 \frac{p^2}{\mu c}}{-\frac{2EP^2}{\mu c^2}} = -\frac{C}{E} \quad (100-5)$$

توجه کنید که برای مدارهای بیضی $E < 0$. رابطه (8-101) نشان می دهد که انرژی هر سیاره فقط به طول قطر بزرگتر آن بستگی دارد، یعنی

$$E = -\frac{C}{2a} \quad (101-5)$$

برای اغلب سیارات منظومه شمسی C بسیار کوچک است و مدار حرکت به رابره نزدیک است. تنها استثنا سیاره عطارد است که فوج از مرکز آن ۲۰۵۶ کیلومتر است. ستاره دنباله دارهای تیر با فوج از مرکز بسیار بزرگ ۱۹۹۷ مدار پسیا، کشیده ای دارد.

بیضی بودن مدار حرکت سیارات قانون اول کپلر است. قانون دوم کپلر نیز چنانکه قبلاً در بخش (3-10) دیده ایم، حاکی از آن است که $\frac{a^3}{P^2}$

جایز شدن مساحت توسط شعاع حاصل می‌شود مقدار ثابتی است. از رابطه

(۱۵۰-۵) با جایگزینی $r = m$ حجم کاسه 2π داریم

$$\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2\pi} \quad (۱۰۲-۵)$$

این رابطه مستقیماً از قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای نتیجه شده است.

اگر در دوره چرخش یک سیاره به دور خورشید را h بگیریم، مساحت
جایز شده در این دوره برابر سطح مدار سیاره خواهد بود. اگر فرض

مساحت بیضی را از ریاضی داریم بگیریم خواهیم داشت

$$S = \pi ab = \frac{l}{2\pi} \tau \quad (۱۰۳-۵)$$

با استفاده از روابط (۱۸۵-۵) برای a ، b داریم

$$\frac{l}{2\pi} \tau = \frac{\pi r_0^2}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (۱۰۴-۵)$$

اگر h کمترین راه توان ۲ برسانیم در مورد آن به جای $\frac{r_0}{1-e^2}$ کمیت $1/a$

قرار دهیم خواهیم داشت

$$\frac{l^2}{4\pi^2} \tau^2 = \pi^2 r_0^2 a^3$$

که با استفاده از رابطه $r_0 = \frac{e^2}{\mu c}$ (رابطه ۱۷۴-۵) داریم

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{c}{4\pi^2 \mu} \quad (۱۰۵-۵)$$

این رابطه درست مشابه رابطه (۱۷۵-۵) برای حرکت دایره‌ای است

که با قرار دادن $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ در آن حاصل می‌شود. در واقع رابطه

(۱۷۵-۵) حالت خاص رابطه (۱۰۵-۵) برای حرکت دایره‌ای است

حال با توجه به رابطه (۵-۹۹) برای ثابت C و با توجه به تعریف حجم کاسه

سیاره به صورت $\mu = \frac{GM}{1 + \frac{m}{M}}$ رابطه (۵-۱۰۵) به صورت زیر درمی آید

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) T^2 \quad (5-106)$$

رابطه (۵-۱۰۶) حاکی از آن است که مجذور پریود نوسان هر سیاره

به دور خورشید با توان سوم طول قطر بزرگتر مدار آن متناسب

است. با توجه به آن که $\frac{m}{M}$ برای همه سیارات بسیار کوچک است

راحتی برای بزرگترین سیاره یعنی مشتری این نسبت $\frac{1}{1000}$ است) می توان

تنبیه گرفت که نسبت $\frac{a^3}{T^2}$ تقریباً برای همه سیارات همگراگامی

است. این گزاره در حقیقت بیان قانون سوم کپلر برای مدارهای

سیارات منظومه شمسی است.