

به نام خدا



دانشکده ی فیزیک

تمرین سری اول مکانیک تحلیلی 1

(1) اگر $\forall v \in V \Rightarrow V = \sum \alpha_i u_i$ ثابت کنید ضرایب α_i یکتا هستند. یعنی:
 if $v = \sum \beta_i u_i \Rightarrow \beta_i = \alpha_i$

(2) بر حسب ضرایب زیر بسط دهید:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_N \end{pmatrix} \text{ بعدی } N$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) ثابت کنید هر مجموعه از بردارهای متعامد، مستقل خطی هستند.

(4) نامساوی کوشی - شوارتز را اثبات کنید.

(5) نشان دهید:

$$\langle \tilde{f}_n(\theta) | \tilde{f}_{n'}(\theta) \rangle = 0, \quad n \neq n'$$

(6) ثابت کنید:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

(7) نشان دهید:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, |\mathbf{C}|^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

(8) فرض کنید که \mathbf{A} یک بردار دل خواه باشد و \mathbf{e} نیز یک بردار یکه در جهتی معین است. نشان دهید:

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{e} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{e})$$

اهمیت هندسی هر یک از دو عبارت تجزیه شده چیست؟

9) ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای سه بردار A, B و C (غیر صفر) هم صفحه باشند، آن است که حاصل ضرب سه گانه اسکالر زیر برقرار باشد:

$$A \cdot B \times C = 0$$

(10) به روش جبری ثابت کنید که اگر $|A - B| = |A + B|$, آن گاه A عمود است بر B .

(11) **مسئله ی گرام - اشمیت.** می خواهیم با داشتن 3 بردار مستقل خطی u_1, u_2 و u_3 در فضای R^3

مجموعه بردارهای پایه ی متعامد این فضا را e_1, e_2 و e_3 بیابیم. مراحل زیر را دنبال کنید:

الف) ابتدا قرار دهید $e_1 = u_1$.

ب) سپس قرار دهید $e_2 = u_2 + a_{21}e_1$ و اسکالر a_{21} را به گونه ای بیابید که $u_2 \perp u_1$.

ج) در آخر قرار دهید $e_3 = u_3 + a_{31}e_1 + a_{32}e_2$ و اسکالرهایی a_{31} و a_{32} را به گونه ای بیابید که

$u_3 \perp u_1$ و $u_3 \perp u_2$.

د) هر سه بردار e_1, e_2 و e_3 را در نهایت بر حسب اسکالرها بنویسید و مفهوم هندسی این اسکالرها را بیان کنید.

ه) بردارهای پایه ی متعامد را برای سه بردار $u_1 = (0,1,2)$ و $u_2 = (1,1,2)$ و $u_3 = (1,0,1)$ به روش بالا

به دست آورید.

ماعد تحویل: