



به نام خدا

تکلیف سری سوم مکانیک تحلیلی 1

1) اگر \mathbf{r} و $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ هر دو توابع صریحی از زمان باشند، نشان دهید که :

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = r^2 \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$$

2) زاویه ی بین سطوحی را بیابید که با $r^2 = 9$ و $x + y + z^2 = 1$ در نقطه ی $(2, -2, 1)$ تعریف شده باشند.

3) نشان دهید که : $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$

4) نشان دهید که

$$\int (2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) dt = r^2 + \dot{r}^2 + const.$$

که در آن برداری است از مبدا به نقطه ی (x_1, x_2, x_3) . کمیت های r و \dot{r} به ترتیب عبارتند از اندازه ی بردارهای \mathbf{r} و $\dot{\mathbf{r}}$.

5) انتگرال های زیر را محاسبه کنید :

(الف)

$$\int \left(\frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{r}r}{r^2} \right) dt$$

(ب)

$$\int \mathbf{A} \times \ddot{\mathbf{A}} dt$$

6) ثابت کنید که $|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = v^3/\rho$ ، که ρ شعاع انحنای مسیر ذره ی متحرک است.



7) گوی کوچکی را به یک نوارلاستیکی طویل بسته و چنان می چرخانیم

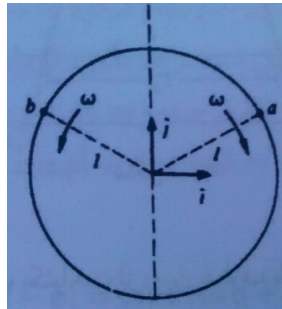
که گوی روی مسیری بیضوی که با معادله ی زیر مشخص می شود حرکت می کند :

$$r(t) = ib\cos(\omega t) + j2bsint(\omega t)$$

که b و ω ثابت هستند. سرعت گوی را به صورت تابعی از t به دست آورید. به ویژه، v را در $t = 0$ و $t = \pi/25$, لحظاتی که در آن گوی به ترتیب در کمینه و بیشینه فاصله ی خود از مبدا است، بیابید.

8) منظور از سرعت نسبی، سرعت نسبت به یک دستگاه مختصات مورد نظر است. (از واژه ی سرعت، به تنهایی معنای سرعت نسبت به مختصات ناظر استنباط می شود.) (الف) مشاهده شده است که نقطه ای دارای سرعت v_A نسبت به دستگاه مختصات A است. سرعت آن نسبت به دستگاه مختصات B که به اندازه ی R از دستگاه A فاصله دارد، چقدر است؟ (R نسبت به زمان می تواند تغییر کند.)

(ب) ذرات a و b در دو جهت مخالف هم روی دایره ای با سرعت زاویه ای ω در حرکت اند (شکل زیر را ببینید). در $t = 0$ هر دوی آن ها در نقطه ی $r = lj$ قرار دارند، که l شعاع دایره است. سرعت a را نسبت به b پیدا کنید.



9) ذره ای با سرعت شعاعی ثابت $\dot{r} = 4 \text{ m/s}$ در صفحه حرکت می کند. سرعت زاویه ای آن ثابت و به مقدار $\dot{\theta} = 2 \text{ rad/s}$ است. وقتی که ذره در فاصله ی 3 متر از مبدا قرار دارد. (الف) بزرگی سرعت و (ب) بزرگی شتاب آن را پیدا کنید.