

به نام خدا

تکلیف سری نهم مکانیک تحلیلی 1

1) نوسانگر دو بعدی را در نظر بگیرید که مختصات آن در دستگاه دکارتی، بر حسب زمان به صورت زیر توصیف می شود:

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$y = B \cos(\omega t + \theta)$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

نشان دهید که شکل مسیر آن در صفحه $x - y$ یک بیضی است، که محورهای اصلی آن نسبت به محورهای $x - y$ به اندازه α زاویه α چرخیده اند. زاویه α را تعیین کنید و اندازه α را به اندازه α بزرگ بیضی را به دست آورید.

راهنمایی: محورهای مختصات $x - y$ را به اندازه α بچرخانید تا به محورهای مختصات $x' - y'$ تبدیل شوند. سپس مختصات x و y هر نقطه را بر حسب x' و y' آن نقطه بیان کنید. سپس α را طوری انتخاب کنید که در معادله x و y جمله x' و y' ضریب x' و y' وجود نداشته باشد.

2) توابع $\sin(z)$ و $\cos(z)$ را که در آن z یک عدد مختلط است، در نظر بگیرید:

الف) سری تیلور توابع $\sin(z)$ و $\cos(z)$ را به دست آورید.

ب) حال در سری تیلور به دست آمده برای هر یک از توابع به جای z متغیر iz را قرار داده و سری به دست آمده را ارزیابی کنید. آیا می توانید توابعی برای سری های به دست آمده معرفی کنید.

راهنمایی: سری تیلور توابع $\sinh(z)$ و $\cosh(z)$ را در نظر بگیرید

ج) حال با استفاده فرم نمایش نمایی توابع $\sinh(z)$ و $\cosh(z)$ ($z \in \mathbb{C}$)، به جای z متغیر iz را قرار داده و توابع به دست آمده را حساب کنید.

3) با استفاده از فرمول اویلر $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ، فرمولی بسته برای $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ بر حسب توانهای $\cos^k \theta$ و $\sin^k \theta$ بیابید. ($k = 1, 2, \dots, n$)

راهنمایی: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

4) در درس اپتیک مدرن خواهید دید که از برهم نهی امواج پراکنده شده از یک توری پراش بر روی یک پرده، موجی نوسانی به صورت زیر حاصل می شود:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A \cos(\omega t + n\varphi)$$

که در آن ω فرکانس موج فرودی و φ یک فاز ثابت است.

با استفاده از فازور مولفه ی $A \cos(\omega t + n\varphi)$ و با استدلالی هندسی مقدار سری فوق را به دست آورید.

موعد تحویل: سه شنبه 1394/09/3

