

تمرین های سری چهارم

(۱) رابطه تعامد زیر را اثبات کنید

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = \pi \delta_{mn}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \pi \delta_{mn}, \quad n \neq 0, \text{ if } n=0 \rightarrow \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos m\theta \, d\theta = 0$$

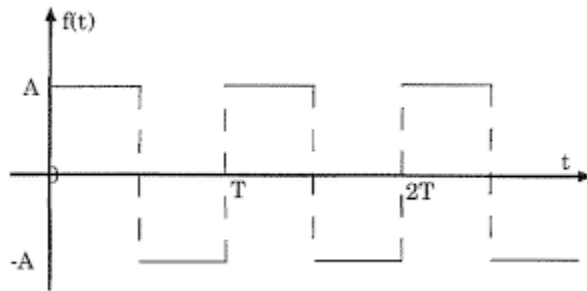
(۲) مقدار انتگرال زیر را حساب کنید. (جواب $\sqrt{2\pi/\alpha}$)

$$I = \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)q^2\right) dq$$

$$I^2 = \int_0^{\infty} dx \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)x^2\right) \int_0^{\infty} dy \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)y^2\right) = \int_0^{\infty} dx dy \exp\left(-\left(\frac{\alpha}{2}\right)(x^2 + y^2)\right)$$

(در صفحه X-Y متغیرهای Γ, θ را بنویسید.)

(۳) بسط فوریه تابع مقابل را بدست آورید. ($\omega = \pi/T$)

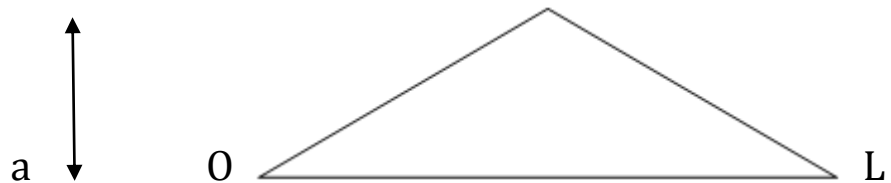


موج مربعی

(۴) معادله موج روی ریسمان " دو سر مانع نرم " و " یک سر بسته یک سر باز " را بدست آورید.

(روی مرز مانع نرم $\partial f / \partial x = 0$)

۵) ریسمان دو سر بسته ای را (در نقاط $0, L$) در لحظه $t=0$ به شکل زیر در می آوریم و از حال سکون رها می کنیم. $f(x,t)$ را بدست آورید. (مثلث متساوی الساقین است).



۶) یک ریسمان نامتناهی در بازه $x \in [0, \infty)$ در نظر بگیرید. فرض کنید در سر $x=0$ سوزنی بسته شده که با معادله $f(0,t)=A \sin \omega t$ حرکت می کند. الف) $f(x,t)$ را بدست آورید.

ب) در نقطه نامشخص x_0 میانگین آهنگ انتقال انرژی به سمت راست را حساب کنید. (برای این کار باید از رابطه $p=Fv$ استفاده کنید که F مولفه عمودی نیرویی است که عنصر سمت چپ به عنصر سمت راست وارد می کند و $v=\partial F/\partial t$).

۷) معادله موج $\partial^2 f/\partial x^2 - (1/v^2) \partial^2 f/\partial t^2 = 0$ را از طریق جداسازی متغیرها حل کنید. برای این کار فرض کنید $f(x,t)=A(x) B(t)$ و معادلات جداگانه ای برای A, B به دست آورید. سپس کلی ترین حل معادله موج را بنویسید.