

تمرین‌های سری ۱۰

(۱) قضیهٔ ویربال را ثابت کنید که در یک بعد به شکل زیر است:

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

بدین منظور (الف) نشان دهید که برای توابع موج حقیقی $\psi(x)$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) x \frac{dV(x)}{dx} \psi(x) = -\langle V \rangle + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\psi}{dx} x V(x) \psi(x)$$

(ب) با استفاده از معادلهٔ ویژه مقدار انرژی ثابت کنید که

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\psi}{dx} x V(x) \psi(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2$$

(۲) از روابط زیر استفاده کنید و معادله را بدست آورید.

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + (\varepsilon - y^2) u = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 u(x) = E u(x)$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$\varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

(۳) تابع $u(y) = \exp(-y^2/2)h(y)$ را در معادله شرودینگر قرار دهید و معادله زیر را بدست آورید.

$$\frac{d^2 h(y)}{dy^2} - 2y \frac{dh(y)}{dy} + (\varepsilon - 1) h(y) = 0$$

۴) جدول ضرب گروه S_3 را بنویسید.

۵) نشان دهید H_n معادله ۱ در معادله ۲ صدق می کند.

معادله ۱:

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}$$

معادله ۲:

$$\frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} - 2y \frac{dH_n(y)}{dy} + 2nH_n(y) = 0$$

۶) می دانیم $Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$ ثابت کنید ضرب اعداد مختلط شرکت پذیر است. یعنی:

$$(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$$

۷) عبارت $f(y,z) = \exp(2zy - z^2)$ را در نظر بگیرید.

الف: نشان دهید $(\partial^2 f / \partial y^2) - 2y(\partial f / \partial y) + 2z(df/dz) = 0$ و نتیجه بگیرید که H_n در معادله زیر صدق می کند.

$$\frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} - 2y \frac{dH_n(y)}{dy} + 2nH_n(y) = 0$$

(راهنمایی: برای بدست آوردن $H_n(y)$ ، تابع $f(y,z)$ را بر حسب متغیر z ، حول $z=0$ بسط تیلور دهید و ضرایب z^n ها را $H_n(y)$ بگیرید.)
ب: H_n را به ازای $n=0,1,2,3$ بدست آورید.