

به نام خدا

تمرین های نظریه گروه سری اول

۱. الف) ثابت کنید اگر e و e' دو عضو ختثای یک گروه باشند، آن گاه خواهیم داشت: $e = e'$.

ب) ثابت کنید اگر b و b' هر دو وارون عضو a باشند، خواهیم داشت: $b = b'$.

۲. فرض کنید n یک عدد صحیح و دلخواه مثبت باشد، ثابت کنید مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر از n که نسبت به n اول هستند، تحت عمل ضرب اعداد به سنج n یک گروه تشکیل می دهند. این گروه را Z_n^* بنامید. برای $n = 8$ و $n = 12$ جدول ضرب این گروه را بنویسید.

۳. ثابت کنید مجموعه ی $G = \{\pm I, \pm \sigma_1, \pm \sigma_2, \pm i\sigma_3\}$ یک گروه است. که در آن I ماتریس واحد 2×2 و σ_i ها ماتریس های پائولی هستند و عمل ضرب اعضا، ضرب ماتریس های 2×2 است.

$$\text{یادآوری: } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

۴. ثابت کنید مجموعه ی ماتریس های $n \times n$ با عمل ضرب ماتریسی تحت شرایط خاص زیر گروه هستند.

الف) ماتریس های یکانی $(U^+U = 1)$ $U(N)$.

ب) ماتریس های متعامد $(O^+O = 1)$ $O(N)$.

ج) ماتریس های یکانی با دترمینان ۱ $SU(N)$.

د) ماتریس های متعامد با دترمینان ۱ $SO(N)$.

۵. فرض کنید G یک گروه است که در آن برای هر a و b رابطه $a^2b^2 = (ab)^2$ برقرار است. نشان دهید که این گروه آبدلی است.

۶. نشان دهید که اگر در یک گروه، هر عضو وارون خودش باشد، آن گروه آبدلی است.

۷. نشان دهید گروه D_4 از دو مولد c و b با خاصیت زیر بدست می آید: $c^4 = b^2 = (bc)^2 = e$

۸. گروه S_8 را در نظر بگیرید. اعضای (27) ، (14) و (153) را بر حسب α_i ها بنویسید.

۹. گروه متناهی G از مرتبه n را که طبق قضیه ی کیلی با زیر گروه \tilde{G} از S_n یکسان (*isomorph*) است، در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از لم بازآرایی ثابت کنید \tilde{G} شامل تک دوری ها نیست.

ب) ثابت کنید \tilde{G} شامل چند دوری هایی با طول متفاوت نیست، مثلاً نمی تواند شامل اعضای به صورت $(l_2 \text{ cycle}) (l_1 \text{ cycle})$ با $l_1 > l_2$ باشد.

ج) ثابت کنید هر گروه متناهی که مرتبه ی آن عدد اول است، فقط C_n می تواند باشد.

۱۰. قضیه کیلی را اثبات کنید. یعنی ثابت کنید هر گروه متناهی از مرتبه ی N با زیر گروهی از S_N یکسان (*isomorph*) است. برای این کار فرض کنید a, b, c اعضای از گروه G هستند، نشان دهید اگر $ab = c$ آن گاه خواهیم داشت $P_a P_b = P_c$. (P_a, P_b, P_c) به ترتیب جایگشت های متناظر با اعضای a, b, c هستند).

توجه: از فصل اولِ جونز تمرین های ۱، ۲، ۳، ۵ و ۶ را حل کنید.