

تکالیف سری چهارم

1- ذره ای به جرم m تحت تاثیر پتانسیل زیر با تقارن کروی قرار دارد

$$V(r) = 0 \quad a < r < b$$

$$V(r) = \infty \quad r \geq b \text{ و } a \geq r$$

سطوح انرژی و ویژه حالت های مشترک H, L^2, L_z را برای این دستگاه پیدا کنید.

2- مقدار چشمداشتی تابع $f(r, p)$ در هر حالت پایا ثابت است. یعنی

$$0 = \frac{d}{dt} \langle r \cdot p \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, r \cdot p] \rangle$$

برای هامیلتونی

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

ثابت کنید

$$\left\langle \frac{p^2}{m} \right\rangle = \langle r \cdot \nabla V(r) \rangle$$

3- با داشتن

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

کمیت های زیر را با استفاده از عملگرهای نوسانگر هماهنگ به دست آورید.

الف: $\langle H \rangle$

ب: $\langle p \rangle, \langle x \rangle, \langle p^2 \rangle, \langle x^2 \rangle$

ج: $\Delta x, \Delta p$

تکالیف سری چهارم

4-الف: ویژه بردارهای بهنجار و ویژه مقادیرهای ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

ب: ماتریس U با عناصر ماتریسی $U_{in} = \langle v_i, u_n \rangle$ در نظر بگیرید که در آن بردار $|v_i\rangle$ ویژه بردارهای بهنجار M و $|u_i\rangle$ پایه اولیه ای هستند که ماتریس M در آن ها نوشته شده است، یعنی پایه

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ماتریس های U, U^\dagger را بنویسید و نشان دهید UMU^\dagger قطری است.

5-الف: نشان دهید

$$\sum_{n,k} U_{nk}^\dagger |u_n\rangle \langle v_k| = \sum_{k,n} U_{kn} |v_k\rangle \langle u_n| = 1$$

که در آن $U_{kn} = \langle v_k, u_n \rangle$ عناصر ماتریس تبدیل بین پایه های $|u_n\rangle$ و $|v_k\rangle$ است.

ب: فرض کنید α_n ها ضرایب بسط بردار $|\psi\rangle$ بر حسب $|u_n\rangle$ و β_k بسط بردار بر حسب $|v_k\rangle$ باشد همچنان $A_{kl} = \langle v_k | A | v_l \rangle$ و $A_{nm} = \langle u_n | A | u_m \rangle$ عناصر ماتریس A در هر کدام از دو پایه باشد با استفاده از عملگر واحد بند الف، رابطه تبدیل α_n ها به β_k و بر عکس و رابطه تبدیل A_{kl} و A_{nm} به یکدیگر را بنویسید.

6- با فرض هرمیتی بودن ماتریس A نشان دهید

$$TrA = \sum_{i=1}^N A_{ii}$$

به این معنی که رد ماتریس A مجموع ویژه مقادیر آن است.

7- ماتریسی $N \times N$ فرض کنید که همه درایه های آن 1 است. با محاسبه مجذور ماتریس و استفاده از نتایج مسئله قبل ویژه مقادیر ماتریس را به دست آورید.

تکالیف سری چهارم